

N° d'ordre : 2262

Thèse

présentée pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE
TOULOUSE**

Ecole doctorale : Energétique et Dynamique des Fluides

Spécialité : Dynamique des Fluides

**Etude statistique de la conductance d'un joint
d'étanchéité statique**

par Frédérique FLUKIGER

Soutenue le 18 octobre 2005 devant le jury composé de

MM. D. Salin	Président du jury - Rapporteur
P.M. Adler	Rapporteur
M. Prat	Directeur de thèse
F. Plouraboué	Co-Directeur de thèse
D. Lasseux	Membre
J. Frêne	Excusé
L. Boccaletto	Invité

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à adresser mes profonds remerciements à mes directeurs de thèse, Messieurs Franck Plouraboué et Marc Prat. Avec une approche totalement différente mais très complémentaire, vous m'avez fait découvrir un sujet intéressant doté d'une problématique riche. Ces trois années auront été très enrichissantes, tant d'un point de vue scientifique qu'humain.

Je remercie l'ensemble des personnes du GDR, dirigé par Monsieur Jean Frêne. Les discussions et les confrontations ont toujours été très intéressantes et m'ont permis de comprendre à quel point le problème étudié est vaste et complexe. Je tiens à remercier plus particulièrement deux personnes : Monsieur Philippe Sainsot, qui m'a fourni les modules de déformation de la partie élastique du code de calcul, et Monsieur Luca Boccaletto, ingénieur au CNES, qui a suivi mon travail pendant ces trois années.

Je remercie Monsieur Olivier Simonin, directeur de l'IMFT, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire. Je profite de cette page pour remercier l'ensemble du personnel technique, et plus particulièrement les services Informatique, COSINUS et la reprographie, qui se sont toujours montrés disponibles lorsque j'ai eu besoin de leur aide : Gilles Martin, Charles Nicolas, Alexei Stoukov, Hervé Neau, Annaïg Pedrono, Muriel Sabater.

J'adresse mes remerciements les plus chaleureux à Monsieur Eric Ducasse, qui a bien voulu m'envoyer le photocopié du cours de "Mathématiques du signal, de la décision et du contrôle des systèmes linéaires" de l'ENSAM de Bordeaux que j'avais perdu et à Madame Caroline Le Calvez, qui m'a généreusement accueillie lors de son cours d'"Algorithmique et Programmation" à l'INSA de Toulouse.

Je tiens à remercier l'ensemble des personnes qui ont participé au jury de ma thèse, et plus particulièrement les rapporteurs, Monsieur Dominique Salin, directeur du FAST et Monsieur Pierre-Marie Adler, directeur de recherche à l'IFGP : ils ont bien voulu lire et corriger ce document, et m'ont fait l'honneur de juger ce travail.

Dans mon parcours, plusieurs personnes ont contribué à me donner goût à la recherche, et plus généralement à la science. Certaines ont beaucoup influencé mes choix et mon travail comme Monsieur Bouroz, professeur de mathématiques et physique au collège, Madame Colin, professeur de mathématiques en classes préparatoires. D'autres m'ont offert l'opportunité de faire ce qui me tenait à cœur. Je citerai ici Madame Azita Ahmadi et Monsieur Didier Lasseux, avec qui j'ai effectué mon premier stage en recherche. Ils ont su me donner envie de persévérer sur cette voie.

Je remercie l'ensemble des collègues de GEMP, notamment Damien, Typhaine, Laurent, Pauline, Franck, Oxa, Bruno, Xavier, XS, et plus particulièrement ceux avec qui j'ai partagé mon bureau : Sébastien, Olivier, Farfadet, Laurent, Mehdi. Qui va me chanter des chansons maintenant ! Je n'oublie pas les visiteurs occasionnels (enfin, pas tant que ça) Kathrin et Laura.

Finalement, je tiens à remercier toute les personnes qui m'ont soutenue, et plus particulièrement ma famille : mes parents, Blandine et Gérard, ainsi que Anne et Jean-Marie ; mes grands-parents, Monique, Liliane, Pierre et Gilbert ; mes beaux-parents, Martine et Michel ; ma belle-soeur Audrey ; mon petit frère Guillaume ; et bien sûr Benoit. Lors de mes études, j'ai toujours été très libre, et très supportée : vous avez su donner votre avis, sans prendre les décisions à ma place. Ensemble, nous avons partagé et nous partageons les moments heureux et ceux plus difficiles. Que serais-je sans vous !

Merci Ben

Table des matières

Nomenclature	v
1 Introduction générale	1
1.1 A propos des joints d'étanchéités	2
1.2 La géométrie du contact	6
1.3 Les modèles d'écoulements	9
1.4 L'approche du problème	11
2 Code de calcul réseau	19
2.1 Génération du champ d'ouverture	19
2.1.1 Création de la surface et de ses dérivées	21
2.1.2 Interpolation d'une surface discrète	22
2.2 Création du réseau de percolation	23
2.2.1 Caractéristiques géométriques des points critiques d'une surface	23
2.2.2 Méthodes de recherche	27
2.2.3 Le tri-casier	27
2.2.4 Création des liens	28
2.2.5 Evolution du réseau	28
2.2.6 Seuil de percolation	28
2.2.7 Détermination de l'amas percolant : la recherche en profondeur	31
2.3 Calcul de la conductance à l'échelle du pavé	32
2.3.1 Calcul de la conductance locale des liens	32
2.3.2 Calcul de la conductance globale	33
2.4 Performances du code	35
2.4.1 Evaluation des ordres de grandeur	35
2.4.2 Evolution des temps de calcul	36
2.4.3 Mémoire	37
2.5 Conclusion	38
3 Comportement non-universel de la conductance d'une fracture Gaus-	
sienne	39

3.1	Probabilité de percolation	39
3.1.1	Calcul du seuil de percolation	40
3.1.2	Comparaison avec des cas classiques	43
3.2	Distribution des conductances locales	45
3.2.1	Propriétés géométriques au col avant contact	46
3.2.2	La conductance électrique	48
3.2.3	La conductance hydraulique	48
3.3	Calcul de la conductance à l'échelle du pavé	50
3.3.1	Calcul de la conductance électrique G_1	51
3.3.2	Calcul de la conductance hydraulique G_3	55
3.3.3	Comparaison avec des cas classiques	60
3.3.4	Discussion	64
3.4	Calcul de la conductance hydraulique à l'échelle du joint	66
3.4.1	Quelques statistiques	67
3.4.2	Reconstruction du joint	69
3.4.3	Probabilité de percolation	71
3.4.4	Moyennes	72
3.4.5	Distributions	74
3.4.6	Une autre méthode	74
3.4.7	Comparaison	76
3.5	Conclusion	77
4	Les déformations élastiques	79
4.1	Formulation du problème de contact	80
4.1.1	Mise en place du problème	80
4.1.2	Résolution du problème	81
4.2	Mise en oeuvre dans le code	82
4.2.1	Visualisation de l'impact des déformations élastiques	83
4.2.2	Adimensionnalisation des résultats	84
4.2.3	Relation charge - déplacement	85
4.3	Résultats	86
4.3.1	Impact des déformations élastiques sur le seuil de percolation	86
4.3.2	Impact sur la conductance locale	87
4.3.3	Impact sur la conductance globale	89
4.3.4	Conclusion	92
5	Approximation des milieux effectifs	95
5.1	Principe de l'EMA	95
5.1.1	Cas général	95
5.1.2	Cas d'une distribution binaire g_a/g_b	97

5.2	Application de l'EMA au calcul de la conductance équivalente d'un joint	97
5.2.1	A partir des histogrammes des distributions statistiques	98
5.2.2	A partir d'une approximation analytique de la densité de probabilité des conductances locales	100
5.3	Approximation analytique	101
5.3.1	Les données	102
5.3.2	Mise en place du problème	102
5.3.3	Développement limité	103
5.3.4	Résultats	106
5.4	Conclusion	109
6	Percolation d'invasion	111
6.1	Introduction	111
6.2	A propos des écoulements diphasiques	112
6.2.1	La mouillabilité dans une situation diphasique	112
6.2.2	Drainage et imbibition	112
6.2.3	Pression capillaire	113
6.2.4	Drainage quasi-statique	113
6.3	Adaptation du code	114
6.4	Résultats	115
6.5	Comparaison	119
7	Conclusions et perspectives	121
A	Analyse du transport dans le cas d'un gaz	125
A.1	Equations de transport	125
A.1.1	Avec adhérence à la paroi	125
A.1.2	Avec un glissement du premier ordre	126
A.2	Impact du glissement	127
B	Interpolation polynômiale de Lagrange	129
C	Recherche des points caractéristiques sur une surface	131
C.1	Méthode de la plus grande pente	131
C.2	Méthode de Newton	132
C.3	Méthode de Quasi-Newton	133
D	Un exemple de stockage compact	135
	Bibliographie	136

Nomenclature

Caractères grecs

Δ	largeur de transition
$\epsilon = \frac{L-L_c}{L_{tot}}$	variation du taux de liens actifs par rapport au seuil de percolation
δ	enfoncement d'une surface (m)
η	petit paramètre ($= \sqrt{h_0 h_{xx}}$)
γ	tension interfaciale ($N m^{-1}$)
μ	viscosité dynamique ($Pa s$)
ν	exposant de percolation
ν_i	coefficient de Poisson associé à la surface S_i
ρ	masse volumique ($kg m^{-3}$)
σ_i	écart-type associé à la grandeur i

Caractères romains

a	pas de discrétisation
\mathcal{A}	amplitude
A	surface en contact (en %)
A_c	surface en contact au seuil de percolation(en %)
C_h	fonction de corrélation associée à h
d	distance entre les surfaces du joint (m)
d_c	diamètre de collision (m)
D	conductivité électrique (S)
E	module d'élasticité (Pa)
E^*	module d'Young (Pa)
f	densité de probabilité

g_1	conductance électrique locale
g_3	conductance hydraulique locale
G_0	préfacteur des régressions
G_1	conductance électrique macroscopique (à l'échelle du pavé) (m)
G_3	conductance hydraulique macroscopique (à l'échelle du pavé) (m^3)
G_{3jc}	conductance hydraulique à l'échelle du joint (m^3)
G_{3jcp}	conductance hydraulique à l'échelle du joint (le joint est percolant) (m^3)
h	champ d'ouverture entre deux surfaces (m)
h_0	ouverture au col entre deux surfaces (m)
h_m	ouverture moyenne entre deux surfaces (m)
\tilde{h}	variation de h autour de son plan moyen (m)
h_{xx}	courbure selon x (m^{-1})
h_{yy}	courbure selon y (m^{-1})
H	critère d'érosion géométrique (m)
i	nombre imaginaire ($i^2 = -1$)
I	densité de flux électrique par unité de longueur ($A m^{-1}$)
k	constante de Boltzmann ($k \approx 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$)
(k_1, k_2)	composantes d'un vecteur d'onde dans l'espace de Fourier
K_n	nombre de Knudsen
l	longueur de corrélation (m)
l_{pm}	libre parcours moyen (m)
\mathcal{L}	largeur des pavés (m)
L	nombre de liens actifs
L_c	nombre de liens actifs au seuil de percolation
L_{tot}	nombre de liens total du système
m	nombre de points de maillage par longueur de corrélation
\mathcal{M}_H	matrice Hessienne
N	nombre de points de maillage sur une largeur
N_c	nombre de pavés percolants dans un joint
N_p	nombre de pavés composant le joint
N_r	nombre de réalisations
p	pression (Pa)
\tilde{p}	transformée de Fourier de la pression

P	proportion de liens percolants
P_a	seuil moyen de percolation
P_{jc}	probabilité de percolation du joint
P_p	probabilité de percolation du pavé
$P_{N_p=i}$	probabilité d'avoir $N_p = i$
P_∞	seuil de percolation pour une surface de taille infinie
\mathbf{q}	débit de fluide par unité de longueur ($m^2 s^{-1}$)
r	norme du vecteur de position
r_a	rayon de l'aire de contact (m)
R	matrice de rigidité
s_p	résistance plastique
S_1	surface supérieure
S_2	surface inférieure
t	exposant de la conductance
T	température (K)
\mathbf{u}	vitesse du fluide dans un lien ($m s$)
u	déplacement des surfaces soumises à une charge (m)
\tilde{u}	déplacement des surfaces dans l'espace de Fourier (m)
U	vitesse intersticielle ($m s^{-1}$)
v_{el}	vecteur des éléments non nuls du stockage compact
v_i	vecteur des colonnes du stockage compact
v_j	vecteur des éléments diagonaux du stockage compact
V	potentiel électrique par unité de longueur ($V m^{-1}$)
w	charge adimensionnalisée, ou charge réduite ($w = \frac{W}{W_0}$)
w_t	charge appliquée à la surface adimensionnalisée
w_{ts}	charge au seuil de percolation adimensionnalisée
W_0	charge impliquant un enfoncement égal à l'écart-type ($W_0 = \frac{3 E^* \sigma_{h_0}^2}{2 \sqrt{2\pi}}$) (N)
W_t	charge appliquée sur la liaison (N)
(x, y, z)	repère orthonormal
z_2	altitude de S_2 (m)
\tilde{z}_2	transformée de Fourier de z_2

Opérateurs

C_n^i	nombre de combinaisons de p éléments parmi n $\left(C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}\right)$
Δ	différence
\bar{i}	moyenne arithmétique de la grandeur i
∇	opérateur nabla
O	ordre de grandeur
Y	fonction de Heaviside
$*$	produit de convolution

Chapitre 1

Introduction générale

Le cadre général d'application de cette étude est celui des étanchéités statiques. Il s'inscrit dans les activités du GDR (Groupement De Recherche) 2345 "Étanchéité statique par joints métalliques sous conditions extrêmes" associant le Centre National de Recherche Scientifique, le Centre National d'Etudes Spatiales, Snecma Moteurs et Électricité de France. Sept laboratoires participent à ce GDR. Ils se répartissent en deux catégories : les laboratoires de mécanique du contact d'une part, assurant l'analyse des surfaces et l'étude des déformations d'un assemblage statique de deux surfaces rugueuses, et les laboratoires de mécanique des fluides d'autre part, étudiant la possibilité d'une fuite au sein du contact décrit par les tribologues. Les laboratoires de mécanique du solide sont l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris (ISMEP), le Laboratoire de Tribologie et de Dynamique des Systèmes (LTDS) de Lyon, le laboratoire de Mécanique du Contact (LaMCoS) de Lyon et le laboratoire de Mécanique du Solide (LMS) de Poitiers. Les laboratoires de mécanique des fluides sont le Laboratoire des Fluides Complexes (LFCT) de Paris VI, le Laboratoire de Transfert, Écoulements, Fluides, Énergétiques (TREFLE) de Bordeaux/Talence et l'Institut de Mécanique des Fluides (IMFT) de Toulouse.

L'étude d'une liaison d'étanchéité est un problème complexe mais qui est soluble si l'on connaît bien les caractéristiques du joint et de l'assemblage sous les diverses sollicitations auxquelles ils sont soumis. Malheureusement, celles des joints sont souvent encore mal déterminées, ce qui rend le fonctionnement relativement empirique [17]. Ainsi, du fait du manque d'études sur le sujet, ces étanchéités ne sont pas optimisées, ce qui entraîne des difficultés technologiques quant à leur réalisation et des coûts de production élevés. Le Groupement de Recherche a donc été mis en place afin

d'acquérir une meilleure compréhension des processus intervenant lors d'une fuite. Plusieurs points de vue sont adoptés par les différents laboratoires participant au GDR afin de dépasser l'empirisme des précédentes approches et de se doter d'outils numériques et expérimentaux permettant de prédire le niveau d'étanchéité d'une liaison. L'objectif de ce GDR est, *in fine*, d'optimiser les assemblages assurant une fonction d'étanchéité.

1.1 A propos des joints d'étanchéités

La disposition de deux surfaces comprimées l'une sur l'autre, même avec un effort important, ne conduit généralement pas à une étanchéité parfaite. En effet, toute surface comporte des défauts de fabrication, défauts de forme (ou macrodéfauts), défauts de surface proprement dits (microdéfauts ou rugosité). Tenter de limiter le nombre de ces défauts augmente toujours, parfois considérablement, le prix des pièces et il n'est jamais, malgré tout, possible de les supprimer totalement. En outre, deux surfaces assemblées, bien qu'il s'agisse de jonctions statiques, subissent des microdéplacements relatifs par suite des sollicitations auxquelles tout assemblage est soumis : effet thermique, effet mécanique, etc. Tous ces défauts et sollicitations sont la source de fuites. On a donc recourt à l'utilisation d'un joint d'étanchéité, qu'on vient placer entre les deux surfaces. Il existe alors deux types de montage : soit libre (le joint est simplement placé entre les deux brides à faces planes), soit bride à bride. Dans ce cas, le joint est placé dans une gorge, comme représenté sur la figure 1.1. Sur ce schéma, on peut distinguer les deux brides, qui font partie de la même pièce que les conduites : des boulons (deux sont visibles sur le schéma) permettent de serrer le dispositif et d'écraser le joint. Par la suite, nous allons nous intéresser uniquement à ce type de montage.

Pour assurer au mieux sa fonction, le joint doit posséder les qualités suivantes : il doit être élastique pour suivre les variations dimensionnelles entre les surfaces à étancher sous l'action des différentes sollicitations et assurer en permanence un minimum d'effort de contact ; plastique, de manière à épouser au mieux les défauts de surface et en particulier ceux dus à la rugosité ; imperméable au fluide à étancher, sans toutefois fluer ; compatible avec le fluide, et cela dans toutes les conditions de fonctionnement. Les matériaux utilisés doivent donc posséder les meilleures qualités

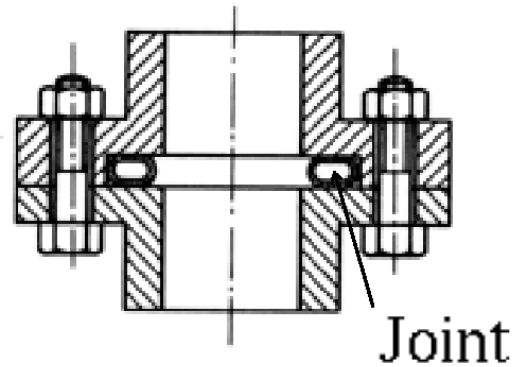


FIG. 1.1 – Coupe de l'assemblage

possibles. Le produit de leur module d'élasticité E par leur résistance plastique s_p doit être minimal, pour assurer une force de serrage faible, tout en possédant de plus une bonne résistance au fluage. Les matériaux doivent aussi être imperméables, au moins au fluide à étancher, et non agressés par lui aux températures extrêmes d'utilisation. Certains matériaux possèdent un assez faible module d'élasticité mais une résistance plastique assez élevée, pour d'autres c'est l'inverse. Dans de nombreux joints d'étanchéité, deux matériaux, voire plus, sont utilisés pour assurer des performances optimales : ce sont les joints composites, mais ils sont généralement plus onéreux que les joints mono-matériau. Au final, le nombre de matériaux utilisés pour réaliser des joints d'étanchéité est assez réduit. Ces matériaux appartiennent à des familles bien définies, surtout celles des élastomères, des matières plastiques et des métaux. Les élastomères sont les matériaux qui possèdent, et de loin, le plus faible produit $E \cdot s_p$. De plus, leur tenue au fluage est assez bonne. Par contre, ils possèdent une très légère perméabilité, ce qui ne permet pas leur utilisation lorsqu'on ne peut pas se permettre une fuite, même faible. Les élastomères les plus performants sont limités à une température de service en continu de 230°C [17]. Malgré tout, les élastomères constituent les meilleurs matériaux d'étanchéité, conduisant à des efforts de serrage faibles. Etant donné leur grande diversité, il est souvent possible d'en trouver un qui convienne pour l'application considérée. Ainsi, pour des applications courantes, par exemple l'assemblage de conduites d'eau dans une habitation, on utilise des joints en élastomère.

Or, dans les applications qui nous concernent, les températures peuvent atteindre plusieurs centaines de Kelvin et les pressions plusieurs centaines de bars. De plus,

à l'extérieur de la liaison, on peut se retrouver dans des situations (conditions de vol par exemple) où la température avoisine quelques Kelvin et la pression quelques bars. Typiquement, deux applications qui peuvent être citées sont le transport de l'eau de refroidissement des circuits primaires de centrale nucléaire, où l'eau atteint 600 K et 155 bars et l'alimentation en carburant des moteurs à propulsion utilisant de l'ergol ou de l'hydrogène pour les moteurs cryotechniques. On se trouve alors en présence de conditions thermodynamiques sévères. De plus, dans de tels systèmes, la fiabilité de l'ensemble dépend fortement de la maîtrise des étanchéités. On a alors recourt à des joints métalliques. De plus, les joints considérés sont composés de plusieurs matériaux. Ils se composent d'un substrat métallique, recouvert par un métal de dureté très inférieure. Ce revêtement, le plus souvent en argent, d'une plus grande plasticité que la bride, permet un meilleur écrasement du joint, tout en gardant une bonne rigidité d'ensemble. L'efficacité de tels joints dépend de plusieurs paramètres, comme les propriétés élastiques du substrat, assurant la fonction de fermeture du joint et compensant les variations de serrage éventuelles, les propriétés plastiques du revêtement, permettant une bonne adaptation aux rugosités des brides, le serrage des brides, les états de surface des éléments en contact, la nature du fluide vis-à-vis duquel on assure l'étanchéité et ses conditions d'utilisation (pression, température, viscosité, ...). Un schéma très simplifié du dispositif étudié est présenté sur la figure 1.2. Sur ce schéma, on peut distinguer les deux brides de serrage (ce sont les collerettes) ainsi que les conduites. Le joint est représenté en noir. Pour fermer le joint, les brides sont boulonnées. Le joint vient alors s'écraser entre les deux brides.

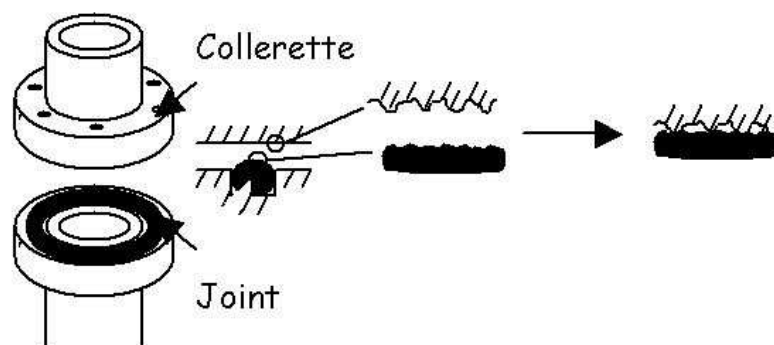


FIG. 1.2 – Schéma du système étudié

Les dimensions des systèmes étudiés sont très variables. Leur largeur varie de

la centaine de micromètres au millimètre. Les diamètres des joints sont également extrêmement variables, de 10 à 500 mm pour les applications spatiales, de 3 à 5 mètres pour les applications dans les centrales nucléaires. Ce contraste d'échelle peut avoir des conséquences très importantes sur la fuite. A titre d'exemple, en s'appuyant sur l'image d'une surface usinée obtenue par tournage (voir figure 1.3), deux cas extrêmes peuvent être distingués : pour une même différence de pression, la fuite peut être radiale, par exemple due à une rayure accidentelle sur une des deux surfaces en contact (la longueur de fuite est alors de l'ordre de la portée du joint), ou circumférentielle, c'est-à-dire s'installer sur le chemin de la spirale laissée par l'outil de tournage. Dans ce dernier cas, la longueur de fuite peut atteindre plusieurs dizaines de mètres, selon le diamètre du contact et le pas d'usinage.

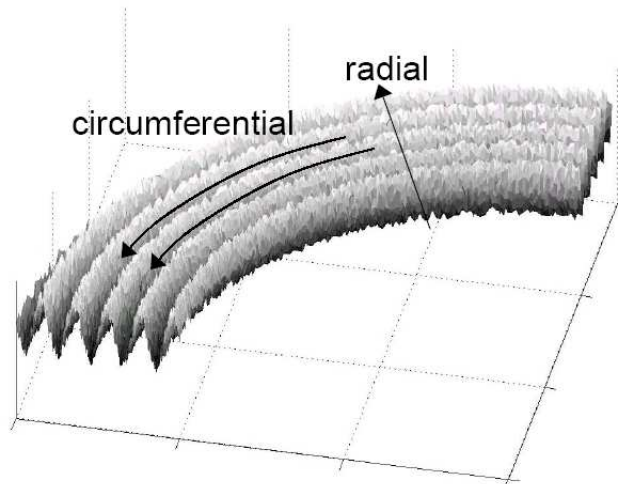


FIG. 1.3 – Schéma d'une surface tournée

Si on regarde les surfaces des brides qui interviennent dans le contact, ainsi que celles du joint, celles-ci paraissent lisses. En effet, à la fin du processus de fabrication de ces pièces, les surfaces intervenant dans le contact ont subi une étape de finition (fraisage, rectification, ...) afin de leur donner un état de surface poli. Or, si on les observe au microscope, il apparaît qu'elles sont rugueuses. Elles sont constituées d'une multitude d'aspérités, dont les altitudes peuvent varier sur des gammes allant du micromètre au millimètre dans le cas de surfaces grossières. Ainsi, les deux surfaces formant le joint présentent des rugosités à l'échelle microscopique de sorte que lorsqu'on les met en contact, il existe des interstices entre elles qui permettent des fuites, comme cela est schématisé sur le dessin de droite de la figure 1.2. La

mise en contact de ces surfaces aboutit à la mise en contact effectif de quelques-unes seulement des aspérités de chacune des surfaces. L'existence de ces micro-rugosités fait que, même en utilisant un revêtement mou pour le joint, il est difficile d'éliminer tous les chemins de fuite.

1.2 La géométrie du contact

La forme, le type des interstices dépend du type de revêtement, de l'usinage (et plus généralement, de la finition apportée à la pièce) au niveau de la bride et du joint. L'analyse des surfaces réelles de joints fait l'objet, dans le cadre du GDR, des travaux effectués au LTDS. Ainsi, les surfaces classiquement mises en jeu dans les joints statiques métalliques apparaissent comme des surfaces striées fortement anisotropes et multi-échelles sur une large gamme. Ce comportement est typique de nombreuses surfaces rugueuses, tant naturelles qu'artificielles. Les surfaces rugueuses auto-affines [24] [27] sont un exemple représentatif de telles surfaces multi-échelles. Il nous a néanmoins semblé approprié de simplifier la nature multi-échelle de la rugosité des surfaces dans le cadre de cette étude. En effet, lors de la mise en contact des surfaces, seules les échelles les plus grandes permettront la présence de chemins de fuite. Ces plus grandes échelles de la rugosité sont associées à la coupure supérieure de la distribution de la rugosité multi-échelle. Bien entendu, lors d'un effort croissant, l'ouverture locale de chaque chemin de fuite local va diminuer. Il peut en résulter une influence croissante des échelles de rugosité inférieures à la coupure supérieure. Cette influence reste néanmoins un effet du second ordre par rapport à celui produit par l'échelle supérieure. C'est pourquoi, dans le cadre de cette étude, nous avons restreint notre analyse à la prise en compte de la plus grande échelle de rugosité. Nous avons ainsi travaillé avec une distribution de rugosité mono-échelle, aléatoire, isotrope. La rugosité des surfaces a ainsi été choisie corrélée à courte portée avec une fonction d'auto-corrélation Gaussienne (*cf* par exemple [2] pour plus de détails). Ces surfaces sont appelées surfaces Gaussiennes par la suite. Elles sont complètement caractérisées par quatre paramètres : leur dimension \mathcal{L} , l'écart-type du champ des hauteurs σ , la longueur de corrélation l et le pas de discrétisation a ou de façon équivalente le nombre de points de discrétisation N dans une direction, soit $a = \mathcal{L}/N$. Un élément important, pour juger de la discrétisation est m , le nombre de points par

longueur de corrélation. Dans le cadre de cette étude, on utilisera généralement $m = 2\pi$ points (en moyenne) par longueur de corrélation. Sur la figure 1.4, on a représenté

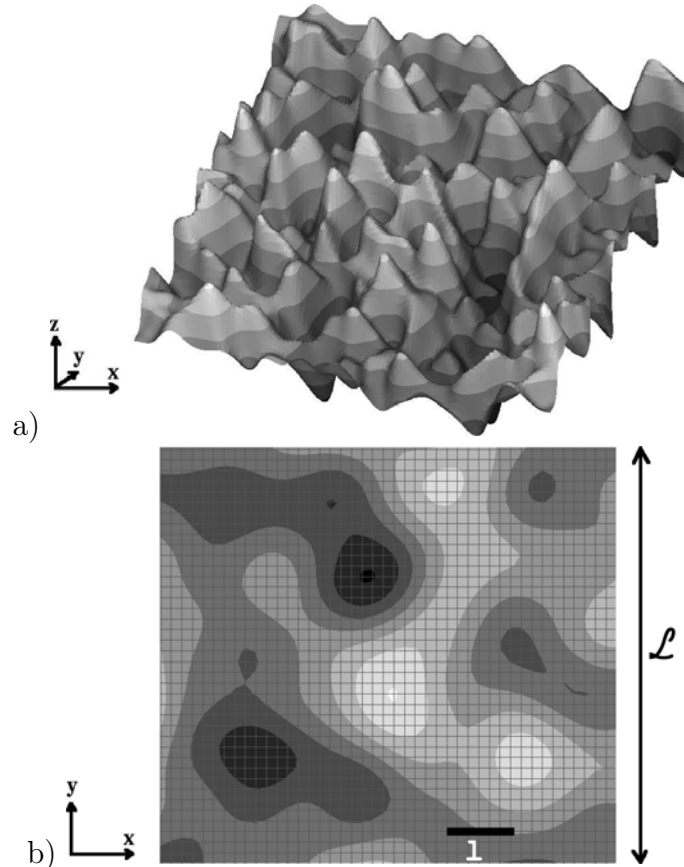


FIG. 1.4 – Représentation d’une surface gaussienne. a) L’échelle des hauteurs a été dilatée pour visualiser la rugosité. b) Iso-hauteurs en niveaux de gris, sur un zoom de la figure a).

une telle surface de taille $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$, avec $\mathcal{L} = 2\pi$. Elle possède une discrétisation de $a = \frac{\pi}{64}$. Son écart-type σ vaut 1 et sa longueur de corrélation vaut $l = \frac{\mathcal{L}}{N} 2\pi = \frac{(4\pi^2)}{N}$. Elle est représentée sur la figure 1.4-b. Compte tenu de ce qui a été énoncé précédemment concernant la surface des joints (surfaces striées anisotropes multi-échelles), le choix des surfaces isotropes Gaussiennes peut paraître comme une simplification excessive. On peut imaginer cependant que les surfaces Gaussiennes isotropes constituent une première approximation des surfaces sablées. Il paraît indispensable de caractériser complètement ce type de système, avant de s’intéresser à des systèmes plus complexes multi-échelles.

Initialement, le système est constitué de deux surfaces rugueuses en contact :

le joint d'un côté, la bride de l'autre. Il est possible de simplifier le problème en se ramenant à un contact entre une surface parfaitement lisse et indéformable, et une surface portant la somme des rugosités des deux surfaces initiales. Cette simplification du problème, classique en mécanique du contact, est connue sous le nom de surface somme [19]. Elle peut-être utilisée dans le cas où on considère des déformations de type érosion géométrique ou déformations élastiques. Le concept de surface somme, qui conserve en tout point l'ouverture entre les surfaces comme le montre la figure 1.5 impose, pour la nouvelle surface rugueuse, les caractéristiques suivantes :

- sa rugosité σ est égale à la racine du carré des rugosités des surfaces initiales

σ_i :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

- sa dureté est celle de la surface initiale la moins dure (le plan lisse est indéformable).
- son module d'élasticité équivalent (module d'Young E^*) est une combinaison des élasticités des deux surfaces initiales, donné sous forme :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (1.1)$$

où E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 sont respectivement les modules d'Young et coefficients de Poisson des surfaces 1 et 2.

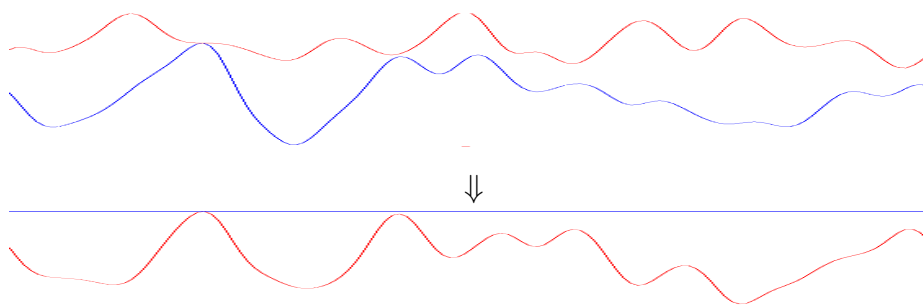


FIG. 1.5 – Représentation du champ des ouvertures

Bien que l'introduction du concept de surface somme constitue à priori une approximation, la résolution du problème de transport que nous allons décrire dans la partie suivante est équivalente dans les deux situations, en utilisant les deux surfaces rugueuses, ou en introduisant la surface somme. Ceci est vrai dans la mesure où on va se placer dans le cadre de l'approximation de lubrification.

1.3 Les modèles d'écoulements

Les fluides utilisés industriellement sont très nombreux. S'il s'agit principalement d'eau pour l'industrie nucléaire, différents gaz (hydrogène, hélium, ...) ou ergols, liquides, gazeux ou critiques sont rencontrés dans le domaine de la propulsion. Les conditions thermodynamiques de ces fluides sont elles aussi très variables.

Plusieurs phénomènes physiques, en fonction de l'état thermodynamique, peuvent conditionner la fuite. Dans la suite de ce travail, nous nous intéresserons principalement, à l'exception du chapitre 6, au cas monophasique avec un seul fluide présent. Dans ce cas, la fuite est pilotée par la pression et la viscosité. Les modèles théoriques décrivant l'écoulement sont les équations de Navier-Stokes si le fluide est incompressible Newtonien, ou de Stokes si les effets inertiels sont négligeables. La fuite s'établissant au travers du contact s'apparente à un écoulement en milieu fracturé. Dans ce cas, un modèle classique pour décrire un écoulement visqueux est l'équation de Reynolds. Si on considère le milieu représenté sur la figure 1.6, on a $\frac{L_z}{L_x} \sim \frac{h}{\mathcal{L}}$ avec h et \mathcal{L} les longueurs caractéristiques selon les directions z et (x, y) . Typiquement dans les cas qui nous intéressent, on a $h \simeq 1 \mu m$ et $\mathcal{L} \simeq 10 \mu m$. Cela signifie donc que les pentes du milieu sont faibles, et que l'écoulement se fait à faible vitesse. On obtient donc que le nombre de Reynolds Re défini comme

$$Re = \frac{\rho h U}{\mu} \quad (1.2)$$

est petit devant 1, avec U la vitesse interstitielle du fluide dans le milieu ρ sa masse volumique et μ sa viscosité dynamique. Ainsi, les effets inertiels sont négligeables

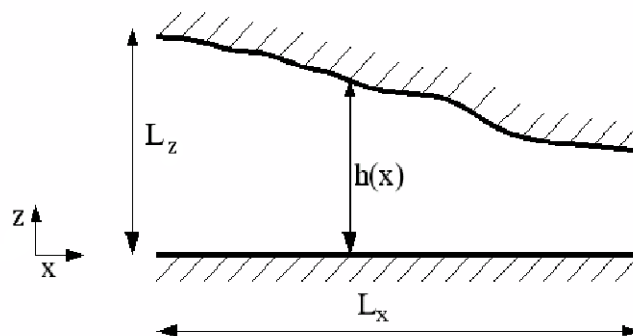


FIG. 1.6 – Milieu se situant dans le cadre de l'approximation de lubrification

et les équations de Stokes permettent de décrire l'écoulement du fluide. En utilisant le rapport d'échelle existant entre les directions verticales et horizontales, ces équations se simplifient considérablement. Il est ainsi possible de montrer que la pression est uniforme dans la direction verticale, comme dans une approximation de couche limite (voir par exemple [8], [33]). Ainsi, le champ de vitesse de l'écoulement horizontal peut être intégré dans la direction verticale, dans laquelle il développe un profil parabolique. Ce profil est caractéristique de l'approximation de lubrification de Reynolds que l'on appelle aussi l'approximation de lubrification. Si l'on intègre, dans la direction verticale, ce profil de vitesse parabolique pour calculer le débit de fluide dans une section verticale, on trouve que le débit par unité de largeur \mathbf{q} dépend du cube de l'ouverture locale, *i.e.* $\mathbf{q} = \frac{h^3}{12\mu} \nabla p$ où p est la pression du fluide. L'incompressibilité du fluide $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ donne l'équation vérifiée par le champ de pression :

$$\nabla \cdot \left(\frac{h^3}{\mu} \nabla p \right) = 0 \quad (1.3)$$

La validité de l'approximation de Reynolds dans le cas de fractures rugueuses a été discutée [22]. Elle est valable sous l'hypothèse de faible pente locale, c'est-à-dire lorsqu'on a le rapport $\sigma/l \ll 1$, situation dans laquelle nous nous plaçons dans le cadre de notre étude.

Dans le cas d'écoulements gazeux, on ne peut évidemment plus considérer que le fluide est incompressible. Le problème doit donc être abordé de façon différente. De plus, dans le cas d'écoulements gazeux à faible pression, une déviation à la loi de Reynolds peut apparaître. Cet effet est observé en milieu confiné lorsqu'on ne peut plus considérer que la taille des canaux est grande devant le libre parcours moyen des molécules [11]. On parle alors d'effets de glissement aux parois. Pour estimer cet effet, nous évaluons le nombre de Knudsen K_n , qui représente le rapport du libre parcours moyen l_{pm} des molécules entre deux collisions et l'espace h offert à ces deux molécules entre les deux surfaces solides :

$$K_n = \frac{l_{pm}}{h} \quad (1.4)$$

l_{pm} étant estimé à partir du diamètre de collision d_c par :

$$l_{pm} = \frac{kT}{\sqrt{2} p d_c^2} \quad (1.5)$$

où k est la constante de Boltzmann ($k \approx 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$) et d_c est typiquement de l'ordre de l'angström. De manière générale, l'estimation du nombre de Knudsen

montre que le régime moléculaire libre ($Kn \gg 1$) n'est pas atteint pour nos valeurs typiques de h . La plupart du temps, $Kn \ll 1$ et les effets effusifs restent négligeables. Cependant, dans certaines conditions de vol spatial, un régime de transition (ou "slip-flow") peut apparaître. Dans le travail qui suit, le cas des gaz ne va pas être abordé. En revanche, on peut trouver dans l'annexe A quelques développements précisant comment on peut adapter le travail qui a été fait au cas des gaz en condition d'adhérence à la paroi et quel est l'impact d'une condition de glissement de la vitesse d'un gaz.

1.4 L'approche du problème

On veut résoudre un problème de transport sur un domaine de grande taille. Cela passe par la résolution des équations obtenues dans le cadre de l'approximation de la lubrification. Il faut résoudre les équations de transport sur un domaines comportant plusieurs longueurs de corrélation afin d'obtenir un système représentatif. Pour cela, on a donc besoin de discrétiser la surface d'étude. Reprenons celle présentée dans la partie 1.2, possédant m points de discrétisation par longueur de corrélation, ce qui donne une surface à $ml = N$ points de discrétisation sur la largeur \mathcal{L} . Une méthode itérative typique (telle que le gradient conjugué) pour calculer le champ de pression associé à ces $O((ml)^2)$ inconnues nécessitera un temps de calcul de l'ordre de $O((ml)^6)$. Ainsi, si on augmente m d'un facteur 10, on multiplie le temps de calcul par 10^6 . De plus, la discrétisation spatiale doit être adaptée localement selon les variations du champ d'ouverture. Il faut notamment que le maillage soit très fin dans les zones sensibles. En effet, on a une dépendance avec l'ouverture au cube du débit hydraulique du fluide. Une étude précédente [26] a montré que l'ouverture locale au niveau de ces zones sensibles nécessitait une discrétisation locale importante. L'impact du facteur m^6 sur le coût du calcul n'est donc pas admissible dans le cas d'une simulation directe, d'autant plus qu'on souhaite effectuer une étude statistique, donc effectuer un grand nombre de simulations. Nous avons donc développé une méthode qui permet d'envisager une étude statistique du problème.

L'élément clé de ce problème réside dans le fait que des zones sensibles contrôlent le transport lorsque celui-ci a lieu dans des conditions de lubrification [25]. Ces zones sont les constriction dans lesquelles le fluide confiné entre les deux surfaces est obligé

de passer pour trouver son chemin et participer ainsi à la fuite. Lorsqu'on a affaire à des surfaces aléatoires, les maxima du champ d'ouverture constituent des pores où les variations de pression sont limitées. Entre ces pores, il existe des chemins qui passent toujours par des cols (des points selles) du champ d'ouverture (voir figure 1.7-a). Les variations de pression du fluide au passage de ces constriction sont alors très rapides de sorte que la perte de potentiel encaissée par le fluide entre deux maxima est essentiellement concentrée au col. Ceci permet de déterminer des chemins de fuite préférentiels, et de construire ainsi l'équivalent d'un réseau de résistance, où chaque résistance correspond à une zone sensible. Ce type d'approche, appelé "approche réseau" ou "modèle de réseau de pores" (pore network model) dans la littérature est assez classique en milieux poreux, e.g. Sahimi [29], en particulier pour l'étude des écoulements diphasiques, e.g. Blunt et al. [6]. Dans le cadre du GDR, Luciani [15] a suggéré, lors du GDR antérieur à celui-ci (GDR n° 0518) d'utiliser les principes d'une telle approche pour étudier notre problème. De plus, une étude antérieure à ce travail de thèse [26] a permis de développer cette idée dans le contexte rigoureux d'une approche asymptotique. Ce travail a ainsi établi dans quel contexte précis on peut considérer que l'approximation réseau dérive du problème de transport continu initial. Il est à noter que le réseau que l'on dérive de la surface continue initiale constitue en fait le squelette topologique (voir aussi [23]) de la surface. Ainsi, contrairement aux approches réseaux traditionnelles, le réseau n'est pas une donnée a priori du milieu hétérogène étudié. Il dérive ici de la topographie de la surface, et ses caractéristiques (les conductances associées à chaque lien) dépendent du problème de transport étudié, comme nous allons le détailler maintenant. L'exemple d'un tel réseau est donné en figure 1.7-b. où les isovaleurs du champ d'ouverture formé par le contact entre le joint et la bride sont aussi représentées. Les zones en noir correspondent aux zones de grande ouverture, celles en gris très clair aux zones de faible ouverture. Les chemins de fuite préférentiels sont représentés en blanc. Les détails concernant la construction de ce réseau seront donnés au chapitre 2. Ce réseau est composé d'un ensemble de liens. Chaque lien permet de relier des maxima locaux d'ouverture entre eux et passe donc par une zone de plus faible ouverture. Ce sont ces zones qui constituent les zones dites sensibles. Chaque lien possède donc une résistance. Regardons comment calculer la résistance de ces liens selon le problème de transport étudié. Ici, nous allons limiter notre étude aux transports électrique

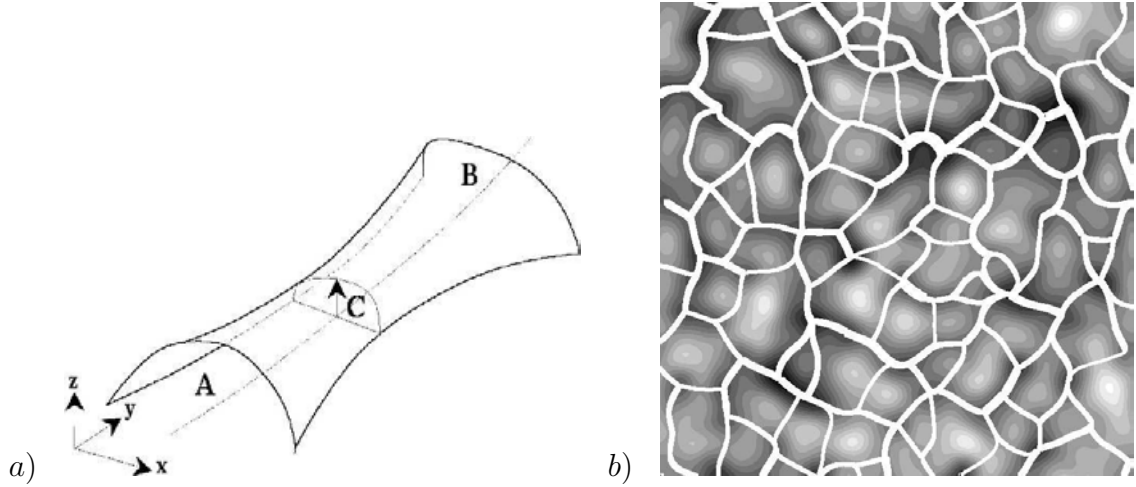


FIG. 1.7 – a) Schéma du lien entre deux maxima du champ d'ouverture (A et B) passant par un col (C). b) Exemple du réseau de liens entre deux surfaces aléatoires.

et hydraulique. Pour le problème électrique, on part de l'équation de Poisson pour le potentiel électrique V : $\nabla^2 V = 0$ avec des conditions de flux nul au niveau des surfaces supérieure et inférieure associées à des parois non conductrices. La densité de flux électrique I s'écrit : $I = D \nabla V$ où D est la conductivité électrique. On peut alors écrire la relation définissant la conductance électrique g_1 :

$$I = -D g_1 \frac{\Delta V}{L} \quad (1.6)$$

où ΔV est la différence de potentiel électrique du lien de longueur l évaluée entre deux maxima successifs. Pour le problème hydraulique, on part de l'équation de Stokes sur la pression p et la vitesse \mathbf{u} : $\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{1}{\mu} \nabla p$ où μ est la viscosité dynamique du fluide. En utilisant l'équation d'incompressibilité du fluide $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ et en appliquant des conditions d'adhérence aux parois, on peut écrire la relation définissant la conductance hydraulique g_3 :

$$\mathbf{q} = -\frac{g_3}{\mu} \frac{\Delta p}{l} \quad (1.7)$$

où Δp est la différence de pression du lien évalué entre deux maxima et \mathbf{q} le débit du fluide (en 2 dimensions, il s'agit du débit linéique, en 3 dimensions, du débit total de fluide injecté). Le calcul des conductances g_i a été évalué dans [26]. Pour cela, on s'appuie sur le fait que les pentes du milieu sont faibles, à partir du développement

asymptotique des relations précédentes. La figure 1.8 montre l'évolution du rapport entre la conductance telle qu'elle a été établie dans cette étude, et celle obtenue en effectuant une résolution directe des expressions (1.6) et (1.7). Le fait d'être dans les

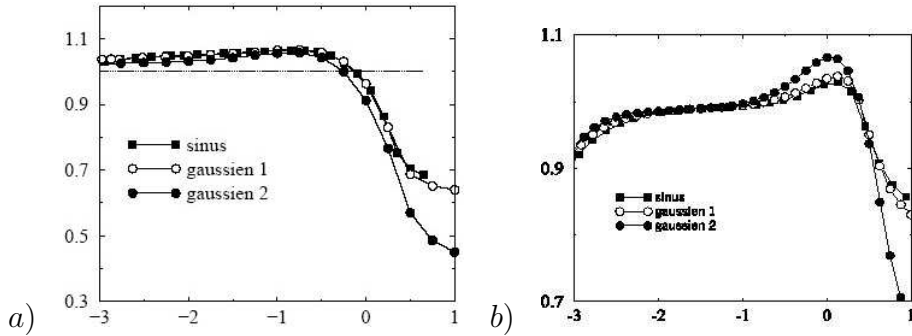


FIG. 1.8 – Evolution du rapport entre la conductance calculée selon les résultats de [26] et le résultat obtenu par résolution directe des expressions (1.6) et (1.7). a) Cas électrique. b) Cas hydraulique.

hypothèses de lubrification permet notamment de dire que la variation du potentiel V ou p est nul dans la direction z du problème, z étant perpendiculaire au plan moyen des surfaces. Toutes les grandeurs peuvent donc s'exprimer en fonction de (x, y) . Le problème qui initialement était un problème 3D se ramène donc à un problème 2D. g_i s'exprime alors très simplement en fonction des caractéristiques géométriques du lien, selon la relation donnée dans la partie 2.3.1. Ensuite, à partir de la conductance de chaque lien du réseau, on calcule la conductance globale du système. La conductance globale hydraulique nous permet alors d'accéder à la fuite du système. Cette méthode permet donc de résoudre un problème de transport 3D en le ramenant à un problème de réseau de résistances.

Nous avons ensuite choisi une approche numérique pour traiter ce problème. Or, les longueurs intervenant dans ce problème sont très différentes. On a dit que les diamètres des joints pouvaient aller jusqu'à 5 mètres, alors que les interstices qui permettent la fuite sont de l'ordre du micromètre. Il n'est donc guère concevable de traiter le problème par la prise en compte continue de toutes les échelles. On définit donc une surface de travail représentative du problème. La portée du joint définit l'échelle de longueur macroscopique. On découpe le joint en pavés (approximativement) carrés, comme le montre la figure 1.9. Chaque pavé peut être isolé, puisqu'il

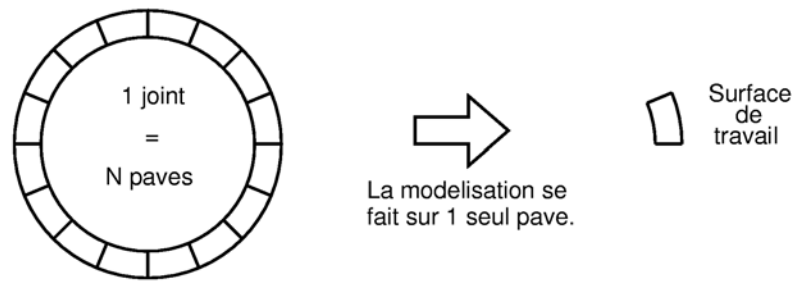


FIG. 1.9 – Modélisation du joint

défini un Volume Élémentaire Représentatif du problème. Le joint peut donc être vu comme une collection de pavés indépendants. L'étude de la perméabilité à l'échelle du joint passe alors par la caractérisation des propriétés statistiques de la perméabilité à l'échelle d'un pavé. L'évolution des propriétés étudiées sur ces surfaces va nous permettre, par le biais de techniques statistiques, d'obtenir la caractérisation d'un joint complet.

De plus, le problème de l'étanchéité est abordé sous l'angle de la percolation. En effet, la théorie de la percolation [5] permet de rendre compte des écoulements de fluides dans des milieux aléatoires, en tenant compte de la richesse des interconnexions. Ce choix se justifie par le fait qu'on a :

- Existence d'un seuil de perméabilité. En dessous de celui-ci, le milieu est constitué d'interstices, mais ceux-ci ne permettent pas la fuite. Au dessus de ce seuil, il existe un ensemble d'interstices connectés, et ce d'un bout à l'autre du milieu, ce qui permet l'existence d'une fuite.
- Au voisinage du seuil, on a des structures de toutes tailles, de l'échelle des interstices jusqu'à la taille de la surface \mathcal{L} .
- Une variation moyenne des coefficients de transport au voisinage du seuil. Les différentes variations sont caractérisées par des lois de puissance.

Ce travail a été mené dans le but d'approfondir nos connaissances des phénomènes intervenant lors d'une fuite au niveau d'un joint rugueux. Il est intéressant de signaler que les résultats ne se bornent pas à cette application, mais s'étendent au cas plus général des joints rugueux, c'est-à-dire aux domaines formés par deux surfaces rugueuses. Ainsi, on trouve des applications en génie pétrolier ou en hydrologie par exemple. On peut aussi citer le domaine de la lubrification. Cette étude

s'inscrit donc dans le cadre générale des fractures dont le champ des ouvertures est corrélé à courte portée.

Plan du document

Dans le chapitre suivant, on va présenter le code de calcul qui a été développé. Il s'agit principalement d'explicitier les méthodes utilisées pour la détermination du réseau équivalent et le calcul des conductances associées. Ensuite, on présentera les résultats obtenus grâce à ce code de calcul. Dans toute cette partie, on considérera que la surface se déforme selon un simple modèle d'écrêtage géométrique. Ensuite, on montrera l'impact de la prise en compte de déformations élastiques par rapport au modèle d'écrêtage. Dans le chapitre 5, on montrera que le comportement du contact loin du seuil de percolation peut être décrit grâce à une approche de champ moyen de type Approximation des Milieux Effectifs (EMA). Ensuite, on présentera l'adaptation qui a été faite afin de simuler une invasion par drainage quasi-statique fondée sur un algorithme classique de percolation d'invasion. Ceci permet aussi de montrer que l'approche réseau permet bien de déterminer les chemins de fuite. Enfin, on terminera par des conclusions et des perspectives.

Chapitre 2

Code de calcul réseau

Ce code de calcul est le fruit de la collaboration de plusieurs personnes (voir [25]). Lors de son élaboration, différents choix algorithmiques auraient été possibles. Notre but a été de trouver un compromis entre efficacité numérique, robustesse et simplicité. En octobre 2002, il permettait déjà d'effectuer des statistiques à l'échelle du pavé. Ma tâche a été de procéder à son débogage et à son optimisation, afin de réduire les temps de calculs et d'augmenter les tailles maximales admissibles pour les surfaces générées.

Le code se décompose en trois grandes parties. La première étape consiste à la génération de la surface aléatoire, la seconde à la création du réseau équivalent et la troisième au calcul de la conductance. Ces étapes sont schématisées sur la figure 2.1. La surface Gaussienne aléatoire est créée selon les paramètres lus en entrée, c'est-à-dire l'écart-type des hauteurs, la taille de la surface, le nombre de points du maillage. La création du réseau comporte deux étapes. La première consiste à trouver les points critiques, la deuxième à créer les liens. Le calcul de la conductance et de son évolution est précédé du calcul du seuil de percolation, ce qui permet de déterminer l'évolution de la conductance en fonction de l'écart au seuil de percolation.

2.1 Génération du champ d'ouverture

De façon générale, on peut écrire que le champ d'ouverture h formé par les deux surfaces S_1 et S_2 de coordonnées $z_1(x, y)$ et $z_2(x, y)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} h_a(x, y) &= z_1(x, y) - z_2(x, y) + H \\ h(x, y) &= Y[h_a(x, y)]h_a(x, y) \end{aligned} \tag{2.1}$$

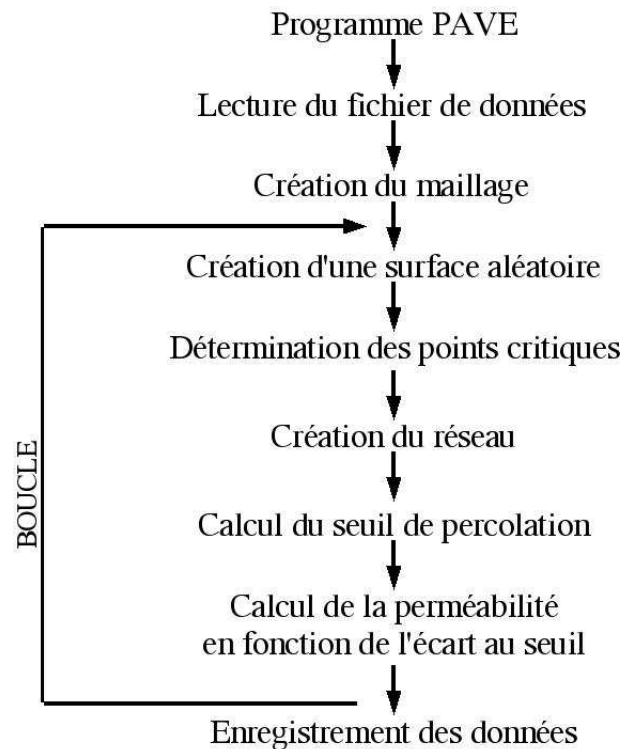


FIG. 2.1 – Structure générale du code de calcul

où Y est la fonction Heaviside ¹ et H un critère d'écrêtage caractérisant le rapprochement moyen des surfaces en contact. La relation 2.1 constitue un modèle géométrique simple pour décrire les déformations dues à une compression normale. En fait, cette relation pourrait constituer une bonne approximation des déformations purement plastiques. Le cas des déformations purement élastiques sera traité au chapitre 4. Une fois en contact, les surfaces supérieure et inférieure ne s'interpénètrent pas et ne se déforment pas. De plus, il faut noter que nous travaillons ici dans l'hypothèse où le problème mécanique, c'est-à-dire la déformation des surfaces et le problème de transport sont totalement découplés. Cette approximation est acceptable dans la mesure où nous travaillons avec des matériaux métalliques. Elle peut être discutable dans le cas où le fluide mis en place est sous très haute pression. C'est cette hypothèse de découplage qui nous permettra par la suite (chapitre 4) de considérer également le cas des déformations élastiques. Dans notre cas, on a donc la surface supérieure S_1 qui est lisse et la surface inférieure S_2 qui porte l'ensemble des rugosités. Sur la figure 2.2, on a représenté une coupe d'un tel champ d'ouverture. La

¹La fonction de Heaviside Y est telle que $Y(t) = 0$ pour $t < 0$ et $Y(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

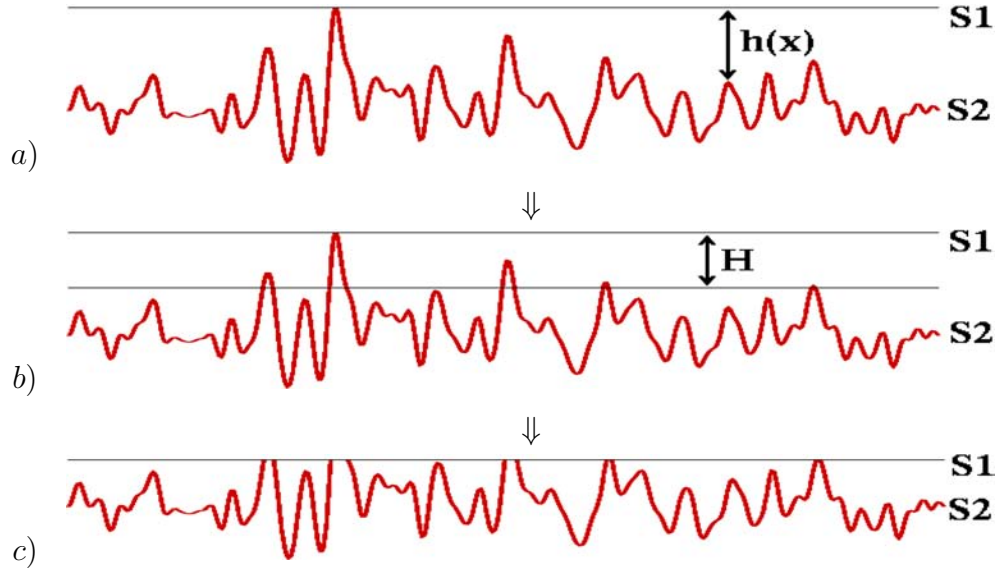


FIG. 2.2 – Evolution du champ des ouvertures

figure 2.2-a représente le champ d'ouverture initial. Ensuite, on applique une coupure de H (figure 2.2-b), et on obtient le champ d'ouverture donné par la figure 2.2-c. On peut écrire $h = h_m + \tilde{h}$ où h_m est l'ouverture moyenne et \tilde{h} la variation de la hauteur autour de son plan moyen. Etant donné qu'on modélise S_2 par une surface gaussienne isotrope corrélée à courte portée, \tilde{h} suit une distribution Gaussienne de variance σ_h avec une corrélation Gaussienne, associée à une fonction de corrélation $C_h(r) = \sigma_h^2 \exp\left(-\left(\frac{r}{l}\right)^2\right)$ où l est la longueur de corrélation et r est la norme du vecteur. On obtient alors le spectre de Fourier $|\tilde{h}(k_1, k_2)|^2$ associé au champ d'ouverture $h(x, y)$ qui s'écrit :

$$|\tilde{h}(k_1, k_2)|^2 = \mathcal{A} \exp(-l^2 (k_1^2 + k_2^2)) \quad (2.2)$$

où \mathcal{A} , le paramètre d'amplitude, est directement relié à la rugosité rms de la surface. Lorsque la hauteur moyenne entre les deux surfaces diminue, c'est-à-dire lorsque H augmente, les deux surfaces entrent en contact. Dans cette partie, on va donc simplement écrire $h = 0$ dans les zones de contact.

2.1.1 Création de la surface et de ses dérivées

Du point de vue numérique, on ne génère pas le champ d'ouverture, mais la surface rugueuse S_2 . Elle est construite à partir de la relation 2.2, comme détaillé dans [16]. Pour cela, on génère le champ complexe discrétisé $|\tilde{z}_2(i, j)|^2$ dans l'espace de

Fourier pour i allant de 1 à N_1 et j allant de 1 à N_2 . En utilisant des propriétés particulières, on aboutit à un champ bi-périodique discrétisé réel $z_2(i, j)$ dans l'espace direct. Pour ce faire, nous utilisons un algorithme de transformée de Fourier rapide inverse, ce qui conduit à des coûts de calcul d'ordre $O(N_1 N_2 \log(N_1 N_2))$. Cet algorithme est issu de la bibliothèque JMFFT développée par Jean-Marie Teulier de l'Idris [35]. Outre sa gratuité, cette bibliothèque présente l'avantage d'être très portable, raisonnablement performante et simple d'utilisation. De plus, afin de créer des surfaces aléatoires, on utilise un générateur de nombres aléatoires Gaussien classique, par le passage d'une transformation polaire, à partir d'un générateur de nombre aléatoire à distribution uniforme. Pour ce dernier, plusieurs ont été testés, donc celui proposé en [28], basé sur une méthode de congruence linéaire. Cet algorithme est utilisé car il permet la production de très grandes séries de nombres aléatoires. De plus, si on ne change pas la graine, et qu'on le lance deux fois de suite, il produit deux fois la même série. Le code peut donc être modifié et testé sur les mêmes cas tests "aléatoires".

Les caractéristiques que nous avons généralement utilisées sont :

- Un maillage carré cartésien de taille $N \times N$, N est une puissance de 2, variant de 32 à 2048 et dont la largeur est fixée arbitrairement à $\mathcal{L} = 2\pi$.
- Un nombre de points par longueur de corrélation égal à $m = 2\pi$ avec une longueur de corrélation $l = \frac{mL}{N}$.

Sur la figure 2.3, on a représenté une surface de taille $N = 256$. Les zones de plus grande ouverture sont représentées en noir, celles de plus faible ouverture sont en blanc. Il y a environ 40 longueurs de corrélation dans chaque direction pour ce champ. Une fois généré, on peut calculer les champs des dérivées premières et secondes de la surface, toujours par une méthode spectrale.

2.1.2 Interpolation d'une surface discrète

La surface est définie sur une grille de taille $N \times N$. Dans la suite du travail (recherche de points, création des liens) on a besoin de connaître l'ouverture et les champs dérivés pour n'importe quel point (x, y) de la surface. Pour cela, on a recours à une interpolation. Plusieurs choix étaient possibles (interpolation linéaire, interpolation polynomiale de Lagrange, de Newton, méthode des splines, ...). Nous avons choisi d'utiliser une interpolation de Lagrange. Après quelques tests, nous

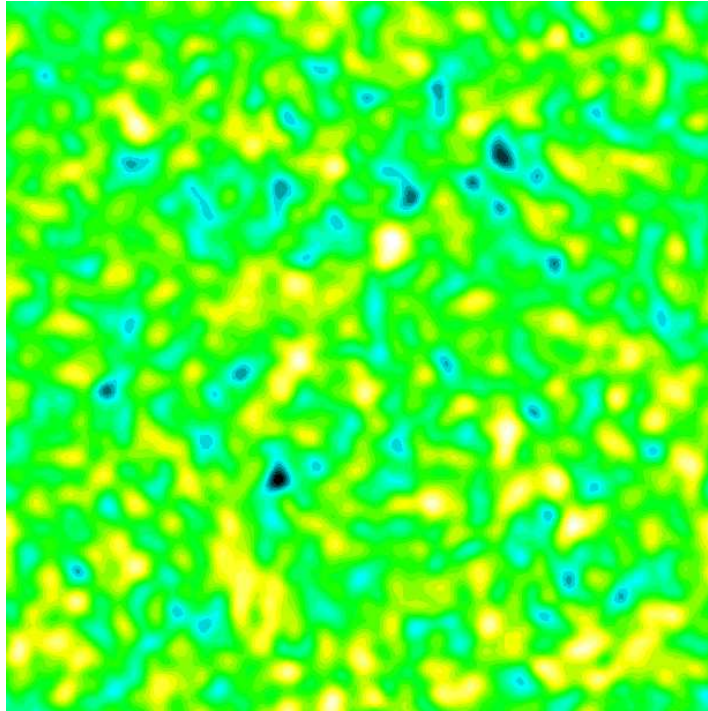


FIG. 2.3 – Isovaleurs du champ d'ouverture

avons choisi d'utiliser une interpolation de degré 2. La mise en oeuvre de la méthode est détaillée dans l'annexe B.

2.2 Création du réseau de percolation

Un réseau est composé d'un ensemble de liens. Les liens sont les plus courts chemins (géodésiques) permettant de relier un maximum du champ d'ouverture à un autre. Chaque lien passe par un col, c'est-à-dire un point selle du champ d'ouverture. La première étape consiste donc à déterminer les maxima et les cols.

2.2.1 Caractéristiques géométriques des points critiques d'une surface

Les maxima, les minima et les points selles sont les points critiques de la surface rugueuse. Tout d'abord, regardons quelles sont leurs caractéristiques, ce qui permettra de comprendre comment les déterminer.

Description des points critiques

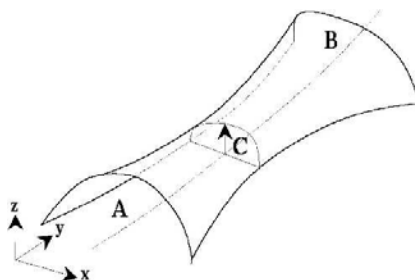


FIG. 2.4 – Points caractéristiques

Si on observe la figure 2.4, on observe 2 points maxima : A et B, et un point-selle : C. Ils se caractérisent par le fait que le gradient du champ d'ouverture en ces points est nul. Si on fait une coupe en C selon le plan (x, z) , C apparaîtra comme un maximum, alors que si on fait une coupe selon le plan (y, z) , il apparaîtra comme un minimum. Les points selles se différencient donc des autres points critiques que sont les maxima et les minima qui conservent leur genre, quel que soit le plan de coupe.

Notion de courbure géométrique

On considère le point M_0 situé sur l'arc γ comme montré sur la figure 2.5. Pour tout $M \in \gamma$ et suffisamment voisin de M_0 , il existe un cercle unique γ_m tangent à γ en M_0 et passant par M . On appelle *cercle osculateur* à γ en M_0 la limite de γ_m quand M tend vers M_0 sur γ . La courbure en M_0 est égale à l'inverse du rayon du cercle osculateur. De la même manière, on obtient la courbure en un point M_0 d'une

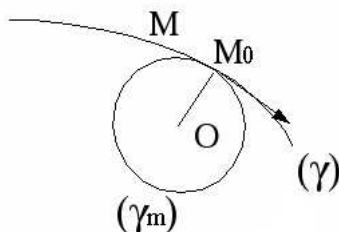


FIG. 2.5 – Courbure dans un plan

surface le long d'une direction \vec{d} du plan tangent : c'est la courbure de la courbe

plane obtenue par intersection de la surface et du plan normal. De cette manière, on obtient la courbure normale pour une direction quelconque.

On peut relier cette courbure normale aux courbures principales. En effet, on peut montrer qu'il existe une base orthonormale (\vec{e}_1, \vec{e}_2) au plan tangent. Les courbures C_1 et C_2 associées à ces directions sont appelées courbures principales. Le fait de connaître les courbures principales permet de calculer la courbure normale associée à n'importe quelle direction.

La courbure Gaussienne correspond au produit des courbures principales, et la courbure moyenne correspond à la somme des courbures principales. Ainsi, un point dont la courbure Gaussienne est négative est dit hyperbolique. Cela correspond à la notion de point selle : la courbure est de sens opposée dans chacune des directions principales. Un point dont la courbure Gaussienne est positive est dit elliptique : la surface est localement un ellipsoïde. On est alors en présence d'un extremum local.

Propriétés des points caractéristiques

La courbure Gaussienne et la courbure moyenne permettent de différencier les différents types de points caractéristiques, qui possèdent donc la propriété commune d'avoir un gradient nul. On a :

Point selle : la courbure Gaussienne est négative.

Maximum local : la courbure Gaussienne est positive et la courbure moyenne est négative.

Minimum local : la courbure Gaussienne est positive et la courbure moyenne est positive.

Calcul des courbures

Dans le cas particulier de surfaces présentant de faibles pentes, on peut montrer [26] que le tenseur de courbure s'identifie avec la matrice hessienne des dérivées secondes de la surfaces. Si l'on considère une surface définie par $h = z(x, y)$ sur (x, y, z) un repère orthonormal. La matrice Hessienne vaut :

$$\mathcal{M}_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial xy} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Les courbures principales sont égales aux valeurs propres de la matrice. Ce sont donc les solutions de l'équation en C suivante :

$$C^2 - C \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy} \right)^2 = 0$$

Donc, étant donné les propriétés des racines d'un polynôme du second degré, les courbures principales vérifient :

$$\begin{aligned} C_1 C_2 &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy} \right)^2 \right) = \det(\mathcal{M}_H) \\ C_1 + C_2 &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \text{Tr}(\mathcal{M}_H) \end{aligned}$$

Les deux courbures précédemment évoquées correspondent donc aux deux invariants du tenseur de courbure et donc de la matrice Hessienne. On accède donc facilement aux courbures gaussiennes et moyennes d'une surface. On peut donc connaître aisément le type de chaque point caractéristique. Sur la figure 2.6, on a représenté la même surface que sur la figure 2.3, à laquelle on a ajouté les extrema locaux. Les cols sont représentés par des carrés, les maxima d'ouverture par des triangles.

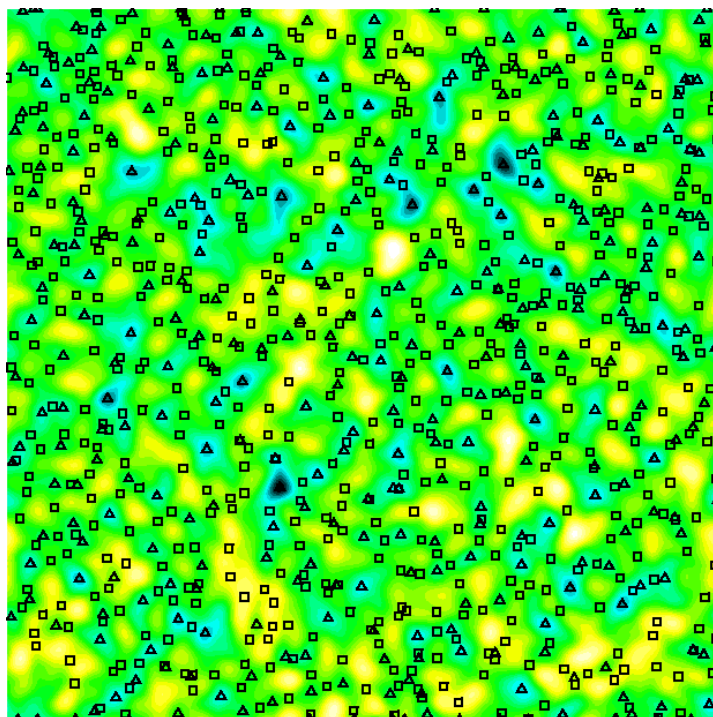


FIG. 2.6 – Isovaleurs du champ d'ouverture avec les maxima d'ouverture (\triangle) et les cols (\square).

2.2.2 Méthodes de recherche

Dans le code développé pour mener cette étude, nous avons choisi d'utiliser les méthodes de Newton et de Quasi-Newton pour obtenir les points critiques de la surface. Ces deux méthodes sont décrites dans l'annexe C. Dans le cas où la déformation de la surface est géométrique, on utilise seulement la méthode de Newton, qui est beaucoup plus rapide que la méthode de Quasi-Newton. Le problème de cette méthode est qu'elle fait appel à la dérivée seconde du champ d'ouverture. Or, dans le cas où on a des déformations élastiques, le champ des dérivées secondes présente de nombreuses oscillations numériques qui sont pénalisantes. C'est pourquoi, dans le cas des déformations élastiques, on va utiliser la recherche de Quasi-Newton, qui ne nécessite pas le calcul explicite des dérivées secondes. Comme cette méthode a parfois du mal à converger, on l'associe à la méthode de Newton. On calcule ensuite la matrice Hessienne du point trouvé afin de distinguer les *minima*, les *maxima* et les points selles. Ce calcul présente une complexité algorithmique d'ordre $O(N_1 N_2)$.

Concernant la mise en œuvre, on initie une recherche de Newton à partir de chaque point du maillage. Ce choix conduit à des redondances dans la recherche. Il faut donc éliminer les points qu'on a déterminés plusieurs fois. Pour ce faire, la méthode la plus simple consiste à comparer le point qu'on vient d'obtenir avec tous les autres points déjà obtenus. Or, cette méthode n'est pas du tout efficace. Une méthode alternative consiste à utiliser l'information spatiale associée à la position de chaque point, méthode que nous allons maintenant détailler.

2.2.3 Le tri-casier

C'est une méthode qui est utilisée pour classer des éléments possédant une information spatiale. Supposons qu'on ait une liste de n éléments et qu'on veuille savoir si l'élément $(n + 1)$ est identique à un des n premiers. Sans aucune information sur ces points, il faut faire jusqu'à n comparaisons. Or, si ces éléments correspondent à des points d'une surface, on conçoit aisément que si le rangement de ces points était effectué d'après leur disposition spatiale, on pourrait effectuer beaucoup moins d'opérations.

Ainsi, dans le cas d'une surface, on découpe celle-ci en casiers de taille suffisante pour qu'il y ait au moins un point par casier. On attribue ensuite à chaque point un

numéro de casier. Lorsqu'on veut comparer un point à ses voisins, il suffit de trouver à quel casier appartient ce point, et de le comparer aux éléments de ce casier et des casiers voisins. On a alors une méthode de complexité algorithmique d'ordre $O(n)$ au lieu de $O(n^2)$, qui correspond à un tri simple.

2.2.4 Création des liens

Un lien est la géodésique reliant deux maxima d'ouverture entre eux. Chaque lien passe par un col qui lui est propre, le col étant le point de plus faible ouverture du lien. Cela se traduit par le fait que le lien passe par les points de plus fortes pentes. On suit donc la plus grande pente pour les déterminer. On initie celle-ci à partir de tous les cols du domaine, et ce dans les deux directions de descente (un maxima d'ouverture correspond à un minima de S_2 , donc les cols ont des altitudes plus hautes que les maxima d'ouverture). Cela permet donc de relier chaque col à deux maxima par un lien. On obtient ainsi un réseau unique : un col correspond à un lien et un seul. La figure 2.7 représente la même surface qu'en figure 2.3, à laquelle on a ajouté les liens du réseau de percolation.

2.2.5 Evolution du réseau

Lorsqu'on rapproche les deux surfaces formant le champ d'ouverture, il apparaît des zones de contact où l'écoulement ne peut plus se faire. Sur la figure 2.8, on a représenté en blanc les zones de contact. Or, si on ajoute les liens déterminés précédemment, alors il apparaît qu'un certain nombre de ces liens passe par ces zones de contact, comme on peut le voir sur la figure 2.9. Il faut donc les éliminer, tel que c'est représenté sur la figure 2.10. Sur ces quelques figures, on peut donc observer l'évolution du réseau de percolation lors de l'évolution du champ d'ouverture.

2.2.6 Seuil de percolation

On considère un milieu formé par des liens. Ce milieu est conducteur s'il existe un chemin percolant d'un côté à l'autre. Si on coupe des liens dans ce milieu, il arrive un moment où celui-ci n'est plus conducteur. Le seuil de percolation correspond à la limite où le milieu est encore conducteur. On caractérise le seuil de percolation soit par le taux de liens actifs, soit par le pourcentage de surface en contact. Il existe

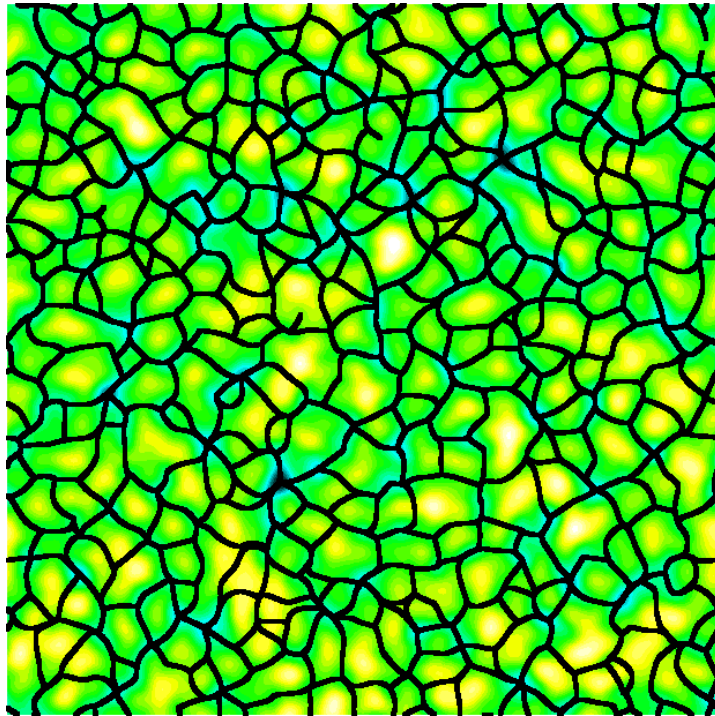


FIG. 2.7 – Isovaleurs du champ d'ouverture avec les liens qui forment le réseau de percolation.

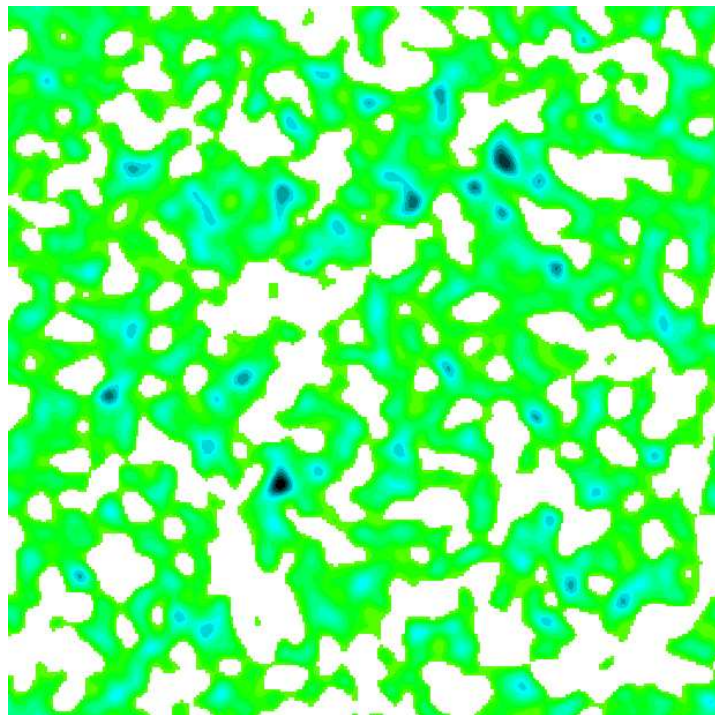


FIG. 2.8 – Les zones en blanc sont les zones de contact.

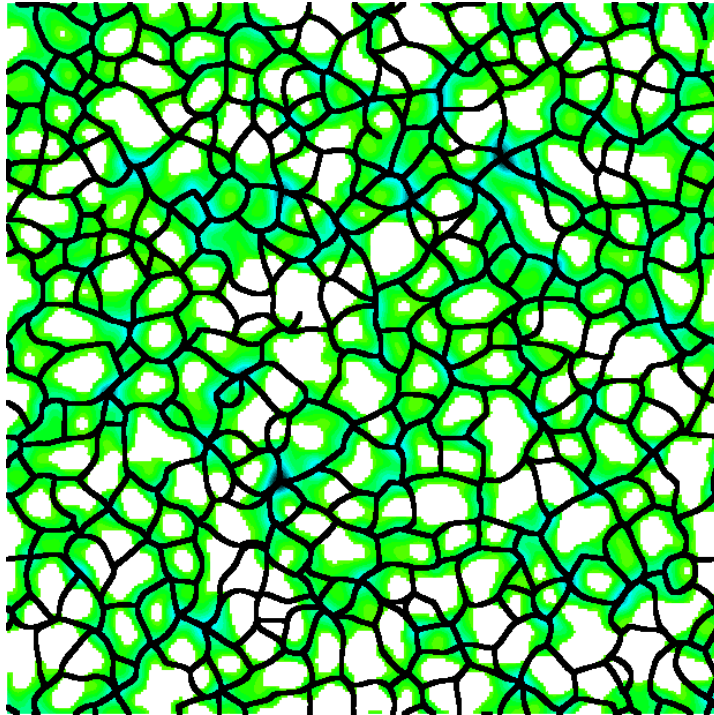


FIG. 2.9 – Isovaleurs du champ d'ouverture avec les liens du réseau de percolation initial, avant écrasement.

d'autres paramètres (rapprochement des plans moyens, taux de noeuds actifs, ...) permettant de caractériser le seuil de percolation, mais nous ne les utiliserons pas comme paramètres d'études.

Les liens actifs sont les liens d'ouverture non nulle. On notera L leur nombre. Le nombre de liens actifs au seuil de percolation est noté L_c . De plus, on note L_{tot} le nombre total de liens du réseau. On obtient le taux de liens actifs au seuil de percolation qui vaut $\frac{L_c}{L_{tot}}$. Par ailleurs, on définit la variable ϵ :

$$\epsilon = \frac{L - L_c}{L_{tot}}$$

qui correspond à la variation du taux de liens actifs en fonction de l'écart au seuil de percolation.

Le pourcentage de surface en contact est nommé A et varie de 0 à 100 %. $A = 0\%$ correspond à la situation initiale, avant serrage. La situation $A = 100\%$ correspond à une situation idéale où les deux surfaces seraient parfaitement en contact. On note A_c le pourcentage de surface en contact au seuil de percolation.

Dans toute notre étude, nous utiliserons les différents paramètres de contrôle :

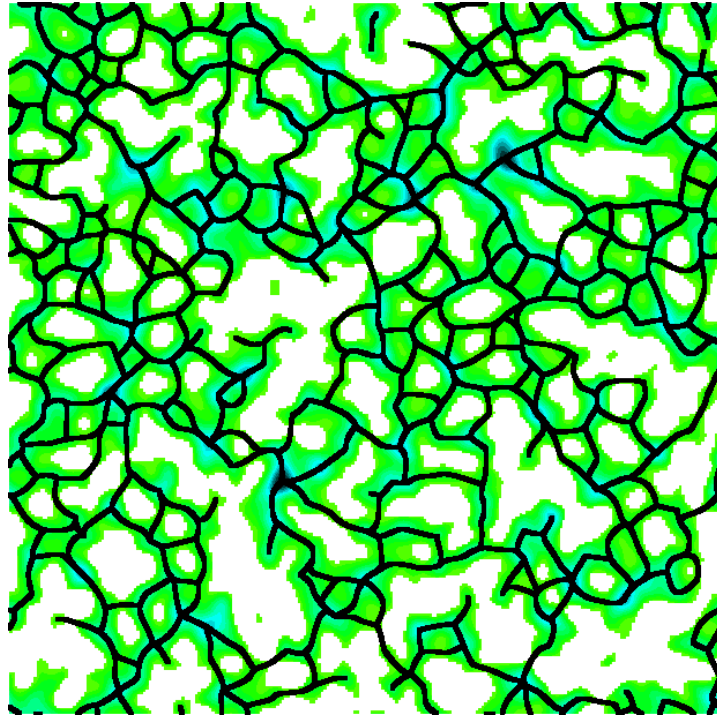


FIG. 2.10 – Isovaleurs du champ d'ouverture avec les liens actifs (*i.e.* d'ouverture non nulle).

soit $A - A_c$ ou ϵ , soit A et $\frac{L}{L_{tot}}$ selon les cas. Ces paramètres vont varier lorsqu'on va faire varier le paramètre de coupure H .

2.2.7 Détermination de l'amas percolant : la recherche en profondeur

L'amas percolant correspond à l'ensemble des liens qui participent au transport, c'est-à-dire à l'ensemble des liens conducteurs qui sont connectés à l'entrée et à la sortie du système. Pour le déterminer, on utilise une méthode de recherche en profondeur. C'est une méthode usuelle utilisée dans l'algorithmique des graphes [34]. Elle permet de savoir quels nœuds d'un arbre sont reliés entre eux. Dans notre cas, elle va nous permettre de savoir si un lien est relié à l'entrée et à la sortie. Les nœuds correspondent aux maxima et deux nœuds ont une liaison père-fils s'il existe entre eux un lien actif.

La méthode est la suivante : on choisit un nœud de départ, soit le nœud courant. Ce nœud est alors marqué, ce qui signifie qu'il a déjà été emprunté. On regarde si il

a un fils, c'est-à-dire s'il est relié à un nœud non marqué. Dans le cas positif, on va sur celui-ci qui devient le nœud actuel, et on le marque. Et on répète l'opération. Si le nœud actuel n'a pas de fils, ou si tous ses fils ont déjà été empruntés, on remonte au nœud père. Et on répète le tout jusqu'à être bloqué. Au final, pour chaque nœud de départ, on obtient une liste de tous les nœuds qui lui sont reliés. Si parmi eux, il existe un nœud appartenant à la sortie, alors l'ensemble des liens parcourus appartient à l'amas percolant. On répète ces opérations jusqu'à ce que tous les nœuds de départ aient été empruntés. On obtient une complexité algorithmique en $O(N_1^2 N_2^2)$ dans le pire des cas.

2.3 Calcul de la conductance à l'échelle du pavé

Dans tout ce qui suit, on va parler de la conductance à l'échelle du pavé, soit la conductance électrique G_1 , soit la conductance hydraulique G_3 . Elle se définissent en fonction des débits linéiques I et \mathbf{q} et des différences de potentiel ΔV et Δp de la façon suivante :

$$\begin{aligned} I &= G_1 \Delta V \\ \mathbf{q} &= G_3 \Delta p \end{aligned}$$

2.3.1 Calcul de la conductance locale des liens

Une analyse asymptotique s'appuyant sur l'existence du petit paramètre $\eta = \sqrt{h_0 h_{xx}}$ (les variables sont définies juste après) des équations de conservation de la quantité de mouvement permet de calculer la conductance d'un lien [26]. Dans ce cas, on parle de la conductance locale g_i . La conductance du lien ne dépend que de la géométrie au niveau du col. Dans les conditions données dans la section 1.4, on obtient :

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{2}{3} h_0 \sqrt{-\frac{h_{xx}}{h_{yy}}} && \text{(Cas électrique)} \\ g_3 &= \frac{1}{14} h_0^3 \sqrt{-\frac{h_{xx}}{h_{yy}}} && \text{(Cas hydraulique)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

où h_{xx} et h_{yy} sont les courbures au niveau du col et h_0 l'ouverture en ce point. Les conventions sont celles de la figure 2.11. On voit donc qu'on a une dépendance proportionnelle à l'ouverture dans le cas électrique, et proportionnelle à l'ouverture au cube dans le cas hydraulique.

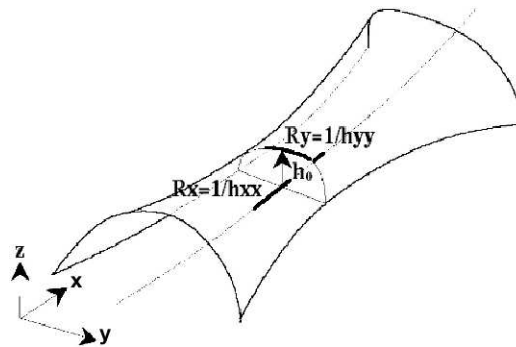


FIG. 2.11 – Dessin d'un col

2.3.2 Calcul de la conductance globale

Le calcul de la conductance globale est équivalent à un calcul de résistance équivalente. Au lieu d'attribuer une résistance à chaque branche d'un circuit, on attribue une conductance locale à chaque lien. Ainsi, grâce aux lois de Kirchhoff, on peut calculer, non pas la résistance du circuit, mais la conductance du pavé.

Les lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff expriment la conservation de l'énergie et de la charge dans un circuit électrique. On distingue :

Loi des nœuds : la somme algébrique des intensités qui arrivent à un noeud est nulle.

Loi des mailles : la somme algébrique des différences de potentiel dans une maille fermée est nulle.

Dans notre situation, cela va nous permettre d'exprimer la conservation du débit au niveau de chaque noeud du réseau. On a donc, au niveau de chaque noeud i du réseau, et pour le cas électrique :

$$\sum_{j \in L_i} I_j = 0$$

où L_i représente l'ensemble des liens j connectés à i . Comme I_j est proportionnel à la conductance g_{1j} du lien et à la différence de potentiel au niveau du lien, on a :

$$\sum_{j \in L_i} g_{1j} (V_j - V_i) = 0$$

Si on nomme V le vecteur des potentiels au niveau de tous les noeuds du système et R la matrice de rigidité du système, on obtient :

$$R \cdot V = 0 \quad (2.4)$$

où

$$\begin{aligned} r(i, j) &= g_1(i, j) \quad \text{pour } i \neq j \\ r(i, i) &= -\sum_j g_1(i, j) \end{aligned}$$

$g_1(i, j)$ étant la conductance du lien situé entre les noeuds i et j , et vaut donc 0 s'il n'y a pas de lien, ou si celui-ci est coupé. Pour le conductance hydraulique, on obtient le même système, avec g_3 au lieu de g_1 , en remplaçant I par \mathbf{q} et V par p .

Résolution d'un système linéaire de grande taille

Le système présenté en (2.4) est de grande taille. Par exemple, pour une surface de taille $N = 128$, ce qui est une petite surface, on a environ 20 longueurs de corrélation par largeur, ce qui donne donc un vecteur Φ de taille 400 et une matrice R de taille 400^2 . En revanche, étant donné que tous les noeuds ne sont pas tous reliés entre d'eux, la matrice R est une matrice creuse (un noeud est en moyenne relié à 4 liens). On va donc utiliser un stockage compact pour la manipulation numérique de la matrice R . Il faut donc trouver une méthode de résolution efficace qui soit adaptée à un tel stockage. C'est pourquoi on a choisi une méthode de type GMRES (méthode du résidu minimum généralisé) associée à un préconditionneur de type LU Incomplet de niveau 0. C'est une méthode directe, qui se comporte comme une méthode itérative : elle est contrôlée par la décroissance des normes résiduelles, mais la solution est exacte.

Stockage compact Soit le système suivant : $R \cdot X = Y$ où R est une matrice carrée de taille $n \times n$, X et Y deux vecteurs de taille n . n est de l'ordre de 10^4 . R est une matrice creuse (avec beaucoup de valeurs nulles). On ne va donc pas stocker tous ses éléments, mais seulement ceux qui sont non nuls. Pour ce faire, on utilise 3 vecteurs : un pour stocker les valeurs des éléments, un deuxième qui stocke le numéro de colonne de chaque élément, et un troisième qui stocke la place de chaque élément diagonaux dans le vecteur des éléments. Un exemple est donné dans l'annexe D. Très rapidement avec l'augmentation de N il devient très intéressant d'utiliser un

stockage compact. D'autant plus que la manipulation des objets stockés de façon compacte n'est guère plus compliquée que la manipulation d'objets stockés de façon "brute".

GMRES avec préconditionneur ILU(t) Supposons qu'on veuille résoudre le système linéaire :

$$A \cdot x = b$$

Le principe de la méthode consiste à approcher x par un vecteur de la forme $x_0 + z$ où x_0 est un vecteur initial choisi par l'utilisateur et z un vecteur du sous-espace de Krylov ² $K_k = \{r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1}r_0\}$ avec k le numéro de l'itération et $r_0 = b - Ax_0$ le résidu initial. On ne va pas chercher à avoir le résidu r_k orthogonal à K_k ; le but est de trouver x_k tel que $r_k = b - Ax_k$ soit minimum.

Afin d'accélérer la convergence de la méthode, on utilise un préconditionneur ILU(0). En effet, dans notre problème, la convergence sera d'autant plus lente que le conditionnement ³ de la matrice A est grand. C'est pourquoi on va chercher une matrice M qui soit une approximation de l'inverse de A et on va résoudre le système :

$$M \cdot A \cdot X = M \cdot b$$

Pour un préconditionnement ILU(0), on va chercher M telle que :

$$M = U^{-1}L^{-1}$$

où U est une matrice triangulaire supérieure ne possédant que des éléments unitaires sur sa diagonale et L une matrice triangulaire inférieure. Leur profil est le même que celui de A (L et U ont leurs éléments non nuls aux mêmes endroits que A). On a :

$$A \approx L \cdot U$$

2.4 Performances du code

2.4.1 Evaluation des ordres de grandeur

Tous les ordres sont donnés pour des surfaces de taille $N \times N$.

²On appelle sous-espace de Krylov associé à $A \in M_n(R)$ et $b \in R^n$ les espaces $K_k(A, b) = \text{Vect}\{b, Ab, \dots, A^{k-1}b\}$

³Le conditionnement d'une matrice M est définie par $\rho(M) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Construction de la surface On utilise des transformées de Fourier rapides. Le coût de cette opération est donc d'ordre $O(N^2 \log(N))$. Elle est cependant associée à des interpolations, qui sont d'ordre $O(N)$.

Détermination des points critiques La méthode de Newton est d'ordre $O(N^2)$. Cette étape, bien qu'ayant un coût moins élevée que celui de la création de la surface, va demander plus de temps de calcul. En effet, le préfacteur qui lui est associé est très important.

Tri des points critiques Le tri casier est d'ordre $O(N)$. Cette étape est pratiquement négligeable devant les temps de calcul des autres étapes.

Recherche en profondeur On a dit que cette étape était d'ordre $O(N^4)$, lorsqu'on est dans la configuration la pire. On verra que cette étape peut devenir pénalisante, d'autant plus qu'on recherche l'amas percolant plusieurs fois.

2.4.2 Evolution des temps de calcul

La figure 2.12-a montre l'évolution des temps d'exécution de chacune des étapes du code de calcul pour une réalisation, et la figure 2.12-b montre l'évolution du temps total que demande l'exécution d'une réalisation en fonction de la taille N du système. Ces temps ont été obtenus sur un ordinateur muni d'un double xéon (bi-processeur) tournant à 2.4 GHz, possédant 4 Go de RAM. On constate que très rapidement, avec l'augmentation de N , l'étape limitante devient celle de la détermination des points critiques. On constate aussi que l'évolution du temps de calcul des liens est du même ordre, et que le calcul du seuil pourrait devenir l'étape limitante pour de très grande taille, ceci à cause de la recherche en profondeur.

Les figures 2.13-a et b montrent l'évolution de ces mêmes temps rapportés au temps total d'exécution. Sur le graphe a), le temps est représenté selon une échelle log, sur le graphe b) selon une échelle linéaire. On constate que la domination par le calcul des points critiques va en diminuant à partir de $N = 1024$.

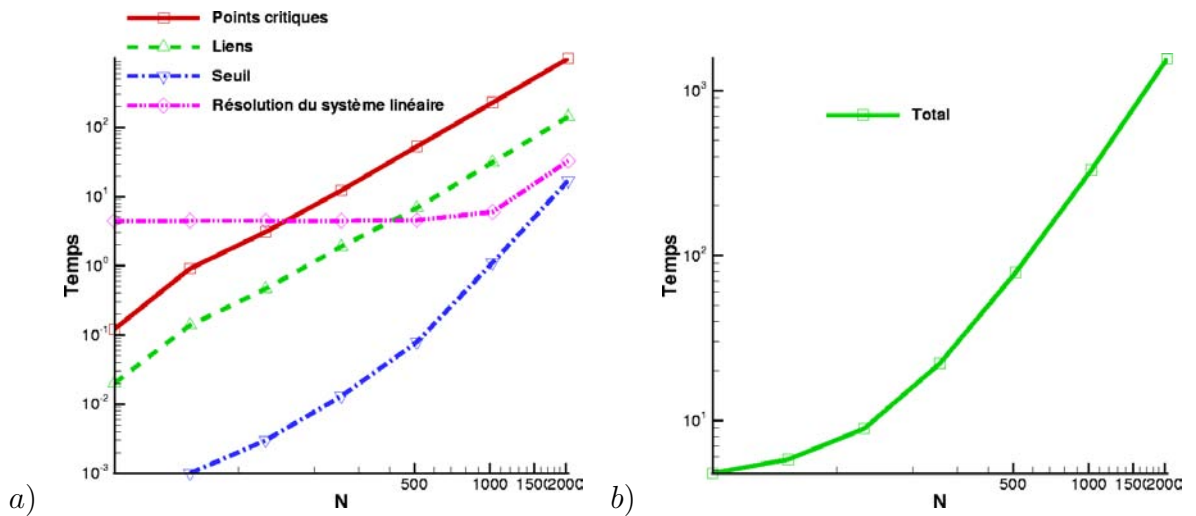


FIG. 2.12 – Evolution des temps de calcul donnés en secondes.

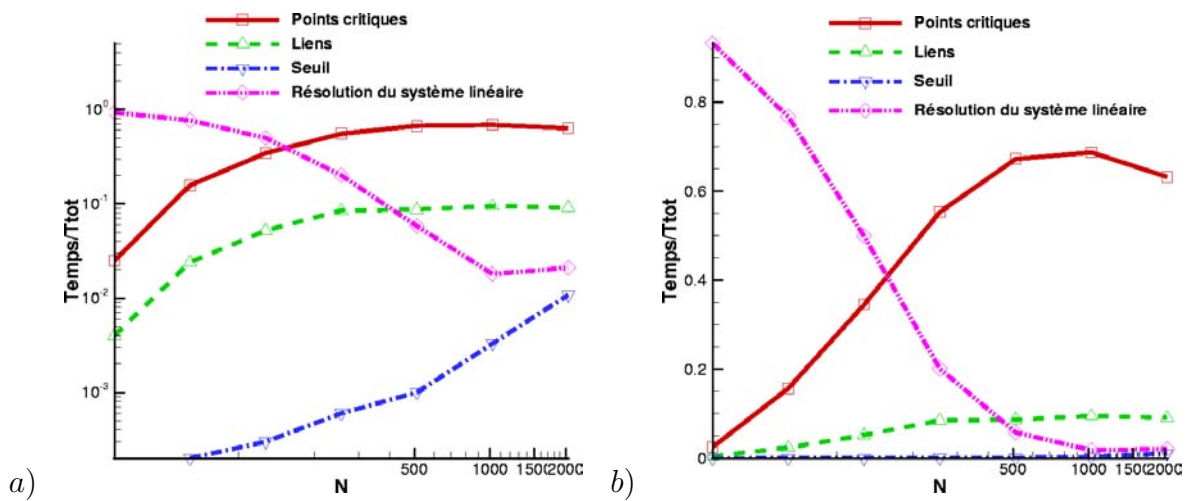


FIG. 2.13 – Evolution des temps de calcul rapportés au temps total

2.4.3 Mémoire

Cet aspect est un point non négligeable du code. En effet, si nous sommes limités dans les simulations au niveau de la taille $N = 2048$, c'est à cause de la mémoire. En effet, il faut stocker des tableaux en mémoire de tailles qui deviennent très importantes. Le tableau de la surface représente à lui seul $16 * 2049 * 2049$ octets, soit 64 méga-octets. Si on passait en $N = 4096$, ce dernier représenterait donc 256 méga-octets. Or, rien que pour la description de la surface et de ses champs dérivés,

on a besoin de 6 tableaux.

Une autre étape où le problème de la mémoire est critique est le moment où on détermine l'amas percolant, ce qu'on doit faire généralement 26 fois par réalisation (16 fois pour calculer le seuil de percolation et 10 fois pour le calcul de la conductance globale). Pour ce faire, il faut déterminer les connectivités du système. Une façon simple, et qui était initialement utilisée, est d'utiliser une matrice carrée de taille égale au nombre de nœuds du système au carré. On utilise une matrice de logiques C . Si $c(i, j)$ est vrai, alors il y a un lien reliant le nœud i au nœud j , si c'est faux, c'est qu'il n'y en a pas. Or, pour $N = 2048$, on a initialement en moyenne plus de 20000 nœuds. Cela aboutit donc à une matrice de taille $20000 * 20000$ bits, soit environ 48 méga-octets. Une autre méthode a été mise en place afin de ne stocker que les éléments indispensables, et sans utiliser un stockage compact, en se basant sur le fait qu'on n'a jamais plus de 12 liens arrivant sur un même nœud. Cette valeur serait à vérifier si on allait à des tailles supérieures, et dans ce cas, le code présente un critère d'arrêt afin de ne pas modifier le problème existant. Cette dernière requiert ainsi un espace de seulement 234 kilo-octets en moyenne pour $N = 2048$.

2.5 Conclusion

Dans cette partie, on a décrit toute la méthodologie employée pour construire des champs d'ouvertures à partir de surfaces aléatoires Gaussiennes et déterminer le réseau de percolation qui leur est associé. Ainsi, à partir d'un élément 3D, on a créé un réseau discret équivalent. Cette méthode va nous permettre d'obtenir les résultats statistiques présentés dans le chapitre suivant.

De plus, les calculs effectués font référence à des systèmes portant de nombreuses hétérogénéités, ce qui est impossible à effectuer, à même coût de calcul, dans le cadre d'une résolution directe.

Chapitre 3

Comportement non-universel de la conductance d'une fracture Gaussienne près du seuil de percolation

3.1 Probabilité de percolation

Le seuil de percolation est une variable aléatoire dépendante des caractéristiques du milieu. Ainsi, la valeur de l'écrêtage géométrique H (définie dans la section 2.1, page 19) qu'il faudra appliquer pour atteindre le seuil de percolation sera différente d'un système à l'autre. De même, au seuil de percolation, le taux de liens actifs (les liens dont l'ouverture au col est non nulle) et le pourcentage de surface ouverte (la surface qui n'est pas en contact) sont différents d'un système à l'autre. Ce sont des variables aléatoires, mais qui, pour le type de système considéré, évoluent comme [2] :

$$P_p = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{X - P_a}{\sqrt{2} \Delta} \right) \right) \quad (3.1)$$

où X correspond soit au taux de liens actifs, soit au pourcentage de surface ouverte, c'est-à-dire $100 - A$. P_a correspond à la valeur moyenne de ce paramètre. $X - P_a$ correspond donc à un écart au seuil de percolation moyen. Δ est la largeur de transition. C'est un paramètre d'ajustement. Pour comprendre la signification de Δ , on peut regarder le graphique de la figure 3.1. Sur cette figure, on a tracé deux courbes, l'une associée à un système de taille finie et l'autre pour un système de

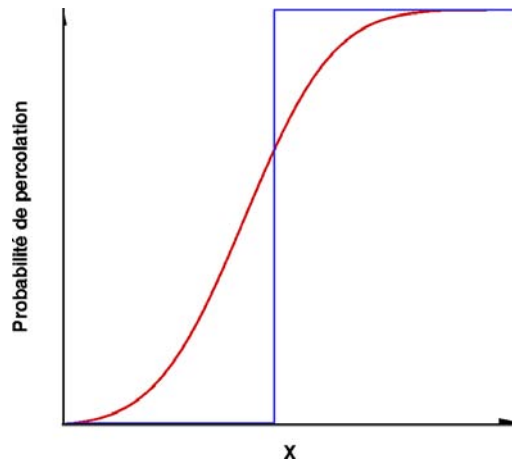


FIG. 3.1 – Probabilité de percolation d'un milieu

taille infinie. Ces deux courbes suivent la même loi, mais la taille infinie correspond au cas limite où Δ tend vers 0. Δ peut être vu comme l'écart, à une probabilité donnée, entre la fraction d'aire ouverte en taille finie et en taille infinie. Plus la taille est petite, plus la courbe de percolation aura tendance à s'étaler. Plus la taille est grande, plus la variation est brusque. Et dans le cas limite de la taille infinie, on a percolation pour $X > P_a$ et étanchéité dans le cas $X < P_a$.

3.1.1 Calcul du seuil de percolation

Dans le cas du modèle d'écrêtage géométrique décrit en section 2.1, page 19, le seuil de percolation correspond à un écrêtage H . Afin de calculer ce seuil, on fait varier H de façon dichotomique. Pour chaque valeur, on teste s'il y a percolation ou non. On arrête le calcul lorsqu'on arrive à une précision sur H de 10^{-5} . Ensuite, on calcule le taux de liens actifs du milieu et le pourcentage de surface en contact associé à cette hauteur.

Pour chaque taille de surface, on effectue N_r réalisations et on calcule le seuil de percolation. Le nombre de réalisations doit être suffisant pour obtenir des statistiques de qualité. Cela permet d'effectuer des ajustements sur les deux paramètres de régression, P_a et Δ . Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 3.1. A chaque fois, on a effectué des moyennes sur 600 réalisations, sauf pour $N = 2048$, en raison du temps de calcul assez long pour cette taille. Sur la figure 3.2-a, on a représenté l'évolution de la probabilité de percolation pour différentes tailles, de $N = 64$

		$X = 100 - A$			$X = \frac{L}{L_{tot}}$		
		P_a	Δ	N_r	P_a	Δ	N_r
N	64	46.91	10.32	600	44.87	11.61	600
	128	48.01	6.70	600	46.73	7.87	600
	256	48.94	4.30	600	48.23	5.16	600
	512	49.31	2.63	600	48.90	3.19	600
	1024	49.62	1.59	600	49.54	1.96	600
	2048	49.90	1.03	118	49.88	1.36	57

TAB. 3.1 – Paramètres d’ajustement de la régression sur la probabilité de percolation

à $N = 2048$. On constate qu’on a bien une variation d’autant plus brusque que la taille est grande, ce qui se traduit par une diminution de la largeur de transition Δ . Sur la figure 3.2-b, on constate une très bonne adéquation entre la régression donnée par l’équation 3.1 associée aux paramètres du tableau 3.1 et les valeurs issues du code.

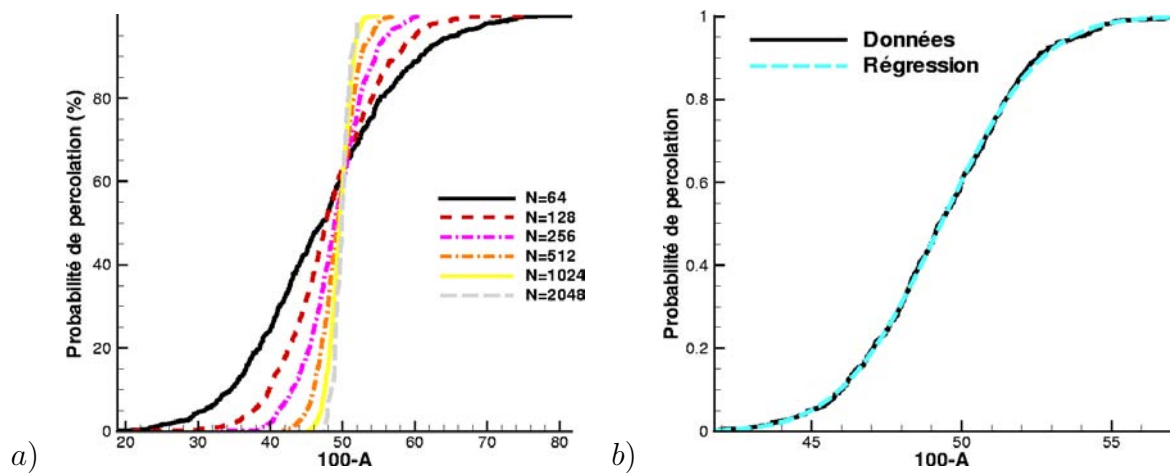


FIG. 3.2 – Probabilité de percolation. a) Evolution en fonction de la taille du système. b) Comparaison entre la régression (en noir) et les données (en gris) sur la probabilité de percolation pour $N = 512$

Ensuite, on regarde l’évolution de Δ en fonction de la taille de la surface. On effectue une régression logarithmique entre la taille de la surface et la valeur de Δ correspondante. On obtient ainsi la valeur de l’exposant de percolation ν (exposant

de la longueur de corrélation en percolation [30]). Etant donnée la structure de

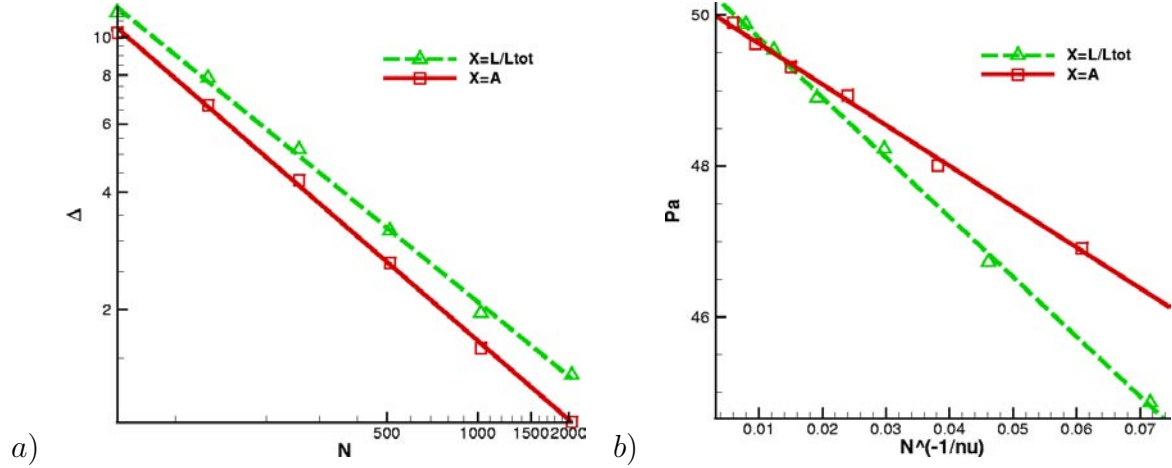


FIG. 3.3 – Evolution des paramètres de régression en fonction de N . a) Δ b) P_a

notre système près du seuil de percolation (de type fractal), on attend les évolutions suivantes pour ces deux paramètres [23] :

$$\begin{aligned} \Delta &\propto N^{-1/\nu} \\ P_a - P_\infty &\propto N^{-1/\nu} \end{aligned} \quad (3.2)$$

où P_∞ est la valeur du seuil de percolation dans le cas infini. Les évolutions de ces paramètres sont représentées sur la figure 3.3. La régression nous permet d'obtenir les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \nu &= 1.48 \pm 0.02 \quad \text{et} \quad P_\infty = 50.16 \quad \text{avec} \quad A \text{ comme paramètre} \\ \nu &= 1.57 \pm 0.02 \quad \text{et} \quad P_\infty = 49.54 \quad \text{avec} \quad \frac{L}{L_c} \text{ comme paramètre} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dans le cas d'un champ d'ouverture non corrélé et en utilisant A comme paramètre d'étude, la littérature indique [23] que les valeurs théoriques de ces deux paramètres sont $\nu = 1.33$ et $P_\infty = 59.275$. Dans le cas où le champ d'ouverture a une longueur de corrélation finie, pour le type de champ que l'on étudie (ce qui correspond au cas $H = 1$ dans [23], H étant l'"exposant de la rugosité"), les calculs montrent une dépendance de ces paramètres à la discrétisation. Les résultats obtenus dans [23] sont synthétisés dans le tableau 3.2, où a est le niveau de discrétisation et l la longueur de corrélation. Dans nos simulations, nous avons utilisé $\frac{a}{l} = \frac{1}{2\pi}$, soit un rapport d'environ 0.159. L'extrapolation des résultats obtenus en [23] pour ce rapport

a/l	P_∞	ν
0.0625	50.5	1.62
0.1250	50.9	1.43
0.2500	50.7	1.38
0.5000	51.9	1.35
1.0000	55.19	1.34

TAB. 3.2 – Valeurs obtenues dans [23] pour le seuil de percolation en taille infinie P_∞ et l'exposant de percolation ν

donne $P_\infty = 50.8$ et $\nu = 1.40$. Nos résultats sont donc proches de ces valeurs. Ils correspondraient cependant plus à un rapport de a/l autour de 0.1. Cette différence peut s'expliquer par le fait qu'on ne travaille pas seulement sur le maillage $N \times N$ de la surface, mais qu'on a recours à une interpolation pour définir des points en dehors du maillage Cartésien. C'est sans doute la raison pour laquelle nous obtenons des résultats correspondant à une discrétisation plus fine.

Cependant, afin de vérifier que les différences obtenues sur les résultats ne proviennent pas de la méthode utilisée, à savoir une méthode réseau mise en place à partir de la construction d'un réseau géodésique, nous avons adapté le code afin de vérifier les résultats donnés avec des situations de référence où les résultats théoriques sont bien établis.

3.1.2 Comparaison avec des cas classiques

Réseau carré

Le code est adapté afin de pouvoir faire des simulations sur un réseau régulier carré. Dans ce cas, on ne construit pas de surface aléatoire, ni de réseau. On utilise directement le maillage, et on considère un pore à chaque noeud, et un lien pour chaque arête du maillage. Pour savoir si un lien est conducteur, on attribue à chacun d'eux un paramètre aléatoire p_r distribué de façon uniforme entre 0 et 1. On fait ensuite varier le paramètre d'écrêtage H précédemment défini. Pour $p_r < H$, le lien est conducteur, pour $p_r \geq H$, le lien est coupé. On utilise ensuite le même module que précédemment pour trouver l'amas percolant, donc pour calculer le seuil de percolation. Les résultats obtenus sur le seuil de percolation sont présentés sur la

figure 3.4. Pour obtenir ces résultats, on a entre 50 et 350 réalisations. La régression de la figure 3.4 permet d'estimer l'exposant $\nu = 1.32$. On retrouve bien la valeur classique pour les systèmes non corrélés [30].

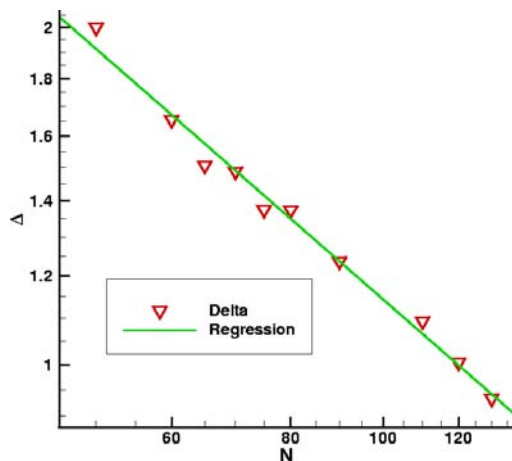


FIG. 3.4 – Evolution de Δ en fonction de N pour un réseau régulier carré.

Réseau aléatoire

Afin de mieux comprendre l'origine des variations de cet exposant, on utilise la même méthode, mais cette fois-ci, le réseau est construit à partir de la surface aléatoire. Le critère de coupure des liens n'est pas l'ouverture, mais un critère aléatoire p_r , défini précédemment. On obtient les valeurs données dans le tableau 3.3. On ne regarde que les variations selon $X = \frac{L_c}{L_{tot}}$. L'évolution de Δ en fonction de N est représentée sur la figure 3.5. Dans ce cas, on obtient un exposant de percolation égal à $\nu = 1.44$.

N	P_a	Δ	N_r
64	47.48	12.60	500
128	48.05	7.79	500
256	49.02	4.60	500
512	49.03	3.14	250
1024	49.47	1.80	300

TAB. 3.3 – Valeurs sur le seuil de percolation dans le cas d'un réseau aléatoire avec critère aléatoire

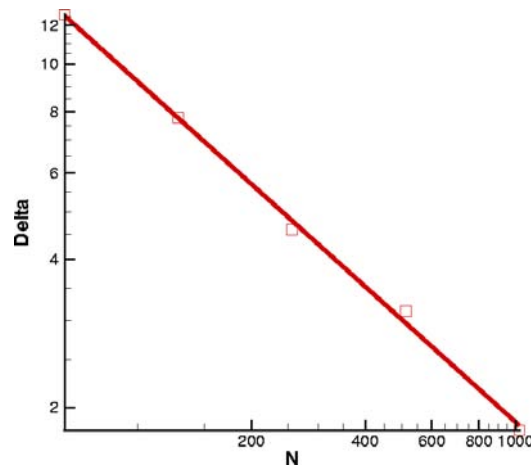


FIG. 3.5 – Evolution de Δ en fonction de N pour un réseau aléatoire avec un critère de coupure aléatoire.

Conclusion

Comme cela a été discuté dans [23], l'exposant ν est sensible à l'existence de corrélations dans la répartition des liens actifs. Nos résultats indiquent que la présence des corrélations a un impact différent sur ν suivant qu'on utilise ϵ ou A comme paramètre de contrôle et suivant le critère de coupure. L'impact est notable puisqu'on a :

- $\nu = 1.32$ dans un cas classique,
- $\nu = 1.44$ dans le cas du réseau aléatoire avec un critère de coupure aléatoire,
- $\nu = 1.57$ dans un cas du réseau aléatoire avec un critère de coupure basé sur l'ouverture.

On conclut également que les variations de l'exposant ν ne proviennent pas des méthodes utilisées pour calculer, mais de l'introduction de corrélation dans le système. Ce premier résultat constitue un élément de validation par rapport à la méthode de détermination utilisée.

3.2 Distribution des conductances locales

Dans ce travail, nous avons étudié des distributions soit à taux de surface en contact imposé, soit à taux de liens actifs imposé. Chaque choix a un but différent. Le taux de liens actifs permet de comparer nos résultats à ceux obtenus dans le cas

d'une étude de percolation "classique". Le taux de surface en contact permet, quant à lui, de relier les résultats à la pression de serrage imposée sur la liaison et constitue donc le paramètre naturel pour l'étanchéité.

Les courbes de distribution à différentes tailles présentent les mêmes comportements. Il n'y a donc aucun intérêt à présenter tous les résultats. On a choisi de présenter seulement ceux pour $N = 512$, et les résultats sont obtenus en effectuant des moyennes sur 300 réalisations. Ce choix représente un compromis acceptable entre temps de calcul et qualité des résultats.

Lors de la présentation des distributions des conductances, on s'intéresse à $g_1 = \frac{g_{c1}}{\sigma_{h_0}}$ pour la conductance locale électrique et $g_3 = \frac{g_{c3}}{\sigma_{h_0}^3}$ pour la conductance locale hydraulique. g_{ci} correspond aux expressions de la conductance locale données en (2.3). σ_{h_0} correspond à l'écart-type de la hauteur.

3.2.1 Propriétés géométriques au col avant contact

Avant toute chose, il est important de noter le profil de distribution de la conductance des liens avant déformation de la surface ainsi que celui du champ d'ouverture. La figure 3.6-a montre la distribution des ouvertures au col h_0 , ainsi que

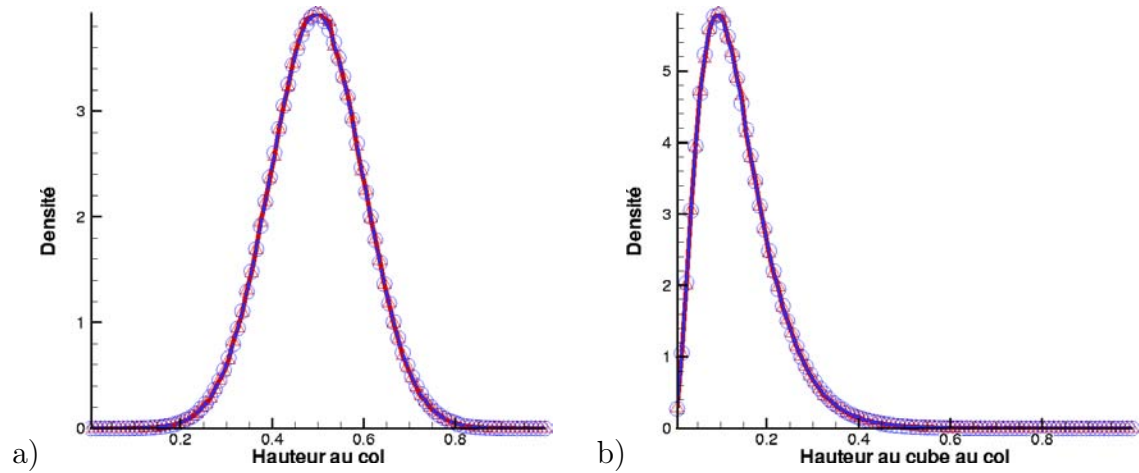


FIG. 3.6 – Densité de probabilité des ouvertures des cols. Les distributions sont représentées avec des \circ et les densité de probabilité f par des \triangle . a) L'ouverture. b) L'ouverture au cube.

leur densité de probabilité. La distribution est Gaussienne, d'équation $f(h_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{h_0}} \exp\left(-\frac{(h_0-\bar{h}_0)^2}{2\sigma_{h_0}^2}\right)$, de moyenne $\bar{h}_0 = 0.497$ et d'écart-type $\sigma_{h_0} = 0.102$ (ces

valeurs sont celles obtenues à partir des distributions). La figure 3.6-b représente la distribution du cube des ouvertures au col h_0^3 , ainsi que leur densité de probabilité qui se calcule aisément : $f(h_0^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{h_0} \cdot 3h_0^2} \exp\left(-\frac{(h_0-\bar{h}_0)^2}{2\sigma_{h_0}^2}\right)$. Une très bonne adéquation est obtenue entre les régressions et les distributions telles qu'on les a obtenues à partir du code de calcul.

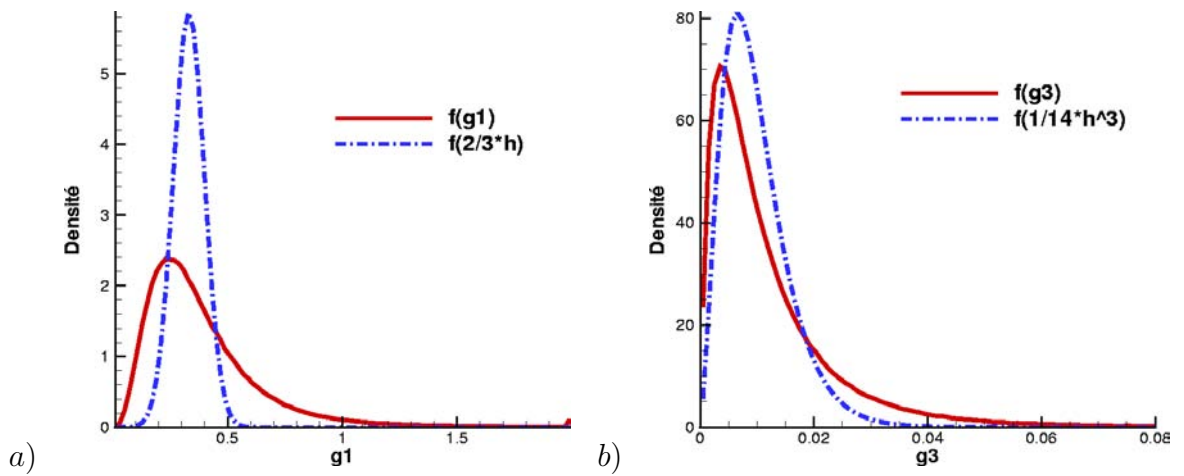


FIG. 3.7 – Densité de probabilité de la conductance des liens. a) Pour la conductance électrique. b) Pour la conductance hydraulique.

La figure 3.7-a représente la distribution des conductances locales g_1 (cf eq. (2.3) du chapitre 2), ainsi qu'une courbe d'équation $f(g_1) = \frac{3}{2\sqrt{2\pi}\sigma_{h_0}} \exp\left(-\frac{((\frac{2}{3}g_1 - \bar{h}_0)^2)}{2\sigma_{h_0}^2}\right)$ qui correspondrait à la distribution de g_1 si $g_1 = \frac{2}{3}h_0$. La figure 3.7-b représente la distribution des conductances locales g_3 , ainsi qu'une courbe d'équation $f(g_3) = \frac{14}{\sqrt{2\pi}\sigma_{h_0} \cdot 3(14g_3)^{2/3}} \exp\left(-\frac{((14g_3)^{1/3} - \bar{h}_0)^2}{2\sigma_{h_0}^2}\right)$ qui correspondrait à la distribution de g_3 si $g_3 = \frac{1}{14}h_0^3$. Contrairement à ce qu'on a obtenu sur les ouvertures au col, on a une différence entre les régressions proposées et les distributions issues du code. La différence vient de l'impact des courbures locales (cf eq. (2.3)). Toutefois, une étude plus approfondie du comportement asymptotique de la distribution de la conductance hydraulique locale lorsque g tend vers zéro va nous montrer que la contribution des courbures est faible dans cette limite.

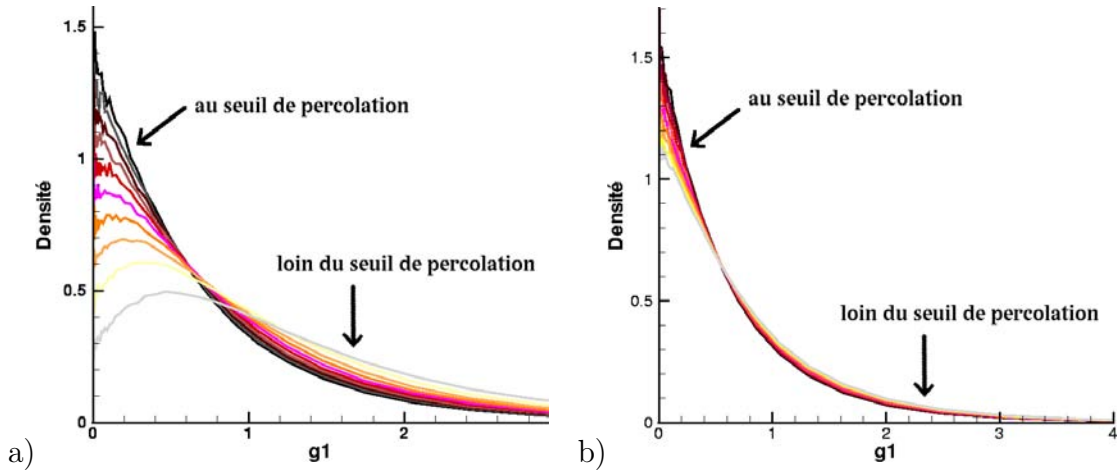


FIG. 3.8 – Evolution de la densité de probabilité de la conductance locale électrique $f(g_1)$. a) ϵ imposé. b) A imposé.

3.2.2 La conductance électrique

La figure 3.8-a montre l'évolution de la distribution de conductance locale électrique en fonction de ϵ , qui représente l'écart au seuil de percolation, calculée en fonction de ϵ (voir section 2.2.6 pour la définition). La courbe en gris correspond à une situation loin du seuil de percolation, pour $\epsilon = 0.45$. La courbe en noir correspond à une situation au seuil de percolation, pour $\epsilon = 0$. Les autres évoluent par pas de 0.05, et ce en allant du gris au noir, avec un dégradé de couleurs. Sur la figure 3.8-b, on a représenté l'évolution de la distribution de la conductance locale électrique en fonction de A , le pourcentage de surface en contact. La courbe en gris correspond à une situation un peu éloignée du seuil de percolation, avec $A = 40\%$. Celle en noir correspond à une situation à la limite du seuil de percolation, avec $A = 58\%$. Les distributions sont calculées en prenant en compte seulement les surfaces percolantes. Nous n'avons pas cherché à identifier analytiquement les différentes courbes. On peut seulement souligner le fait qu'il n'y a pas de divergence de $f(g_1)$ lorsque g_1 tend vers 0.

3.2.3 La conductance hydraulique

La figure 3.9-a représente l'évolution de la distribution de la conductance hydraulique selon ϵ . Les courbes les plus claires correspondent à des situations où ϵ est le plus élevé, les plus foncées aux situations près du seuil de percolation, où ϵ

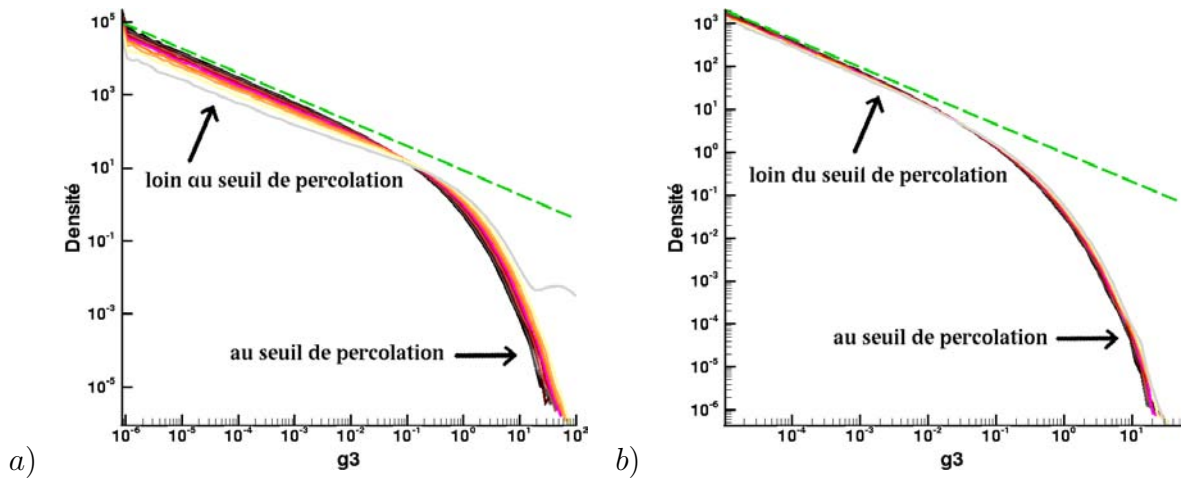


FIG. 3.9 – Evolution de la densité de probabilité de la conductance locale hydraulique $f(g_3)$ pour $N = 512$. a) ϵ imposé. b) A imposé.

est petit. On observe une distribution en loi puissance aux petites conductances. La figure 3.9-b montre l'évolution de la densité de probabilité de la conductance hydraulique pour des valeurs de surface en contact allant de 40% (en gris) à 58% (en noir), c'est-à-dire près du seuil de percolation. On observe une faible dépendance vis à vis de la surface en contact A . Sur les deux graphes de la figure 3.9, la droite supérieure représente une courbe qui évolue comme $g_3^{-2/3}$. On constate dans les deux cas que la distribution aux faibles conductances suit l'évolution de cette droite.

Régression des petites conductances Au niveau des petites conductances, on peut faire une régression en $C g_3^{-2/3}$ pour les deux types de distribution, à ϵ et à A fixé. La figure 3.10 montre l'évolution du produit de la distribution par $g_3^{2/3}$, pour différentes valeurs de ϵ sur le graphe 3.10-a, et pour différentes valeurs de A sur le graphe 3.10-b. La courbe en noir est obtenue au seuil de percolation pour le graphe 3.10-a et près du seuil pour le graphe 3.10-b. Celle en gris correspond à une situation loin du seuil. La moyenne des valeurs pour les petites conductances, correspondant au préfacteur de la loi est donné dans le tableau 3.4. La loi de régression est du type $C = c_0 + c_1 \epsilon$. Les coefficients $c_i, i = 0, 1$ dépendent faiblement des effets de taille finie. Ces résultats seront utilisés ultérieurement, lorsqu'on cherchera à calculer la conductance hydraulique équivalente dans le cadre de l'approximation des milieux

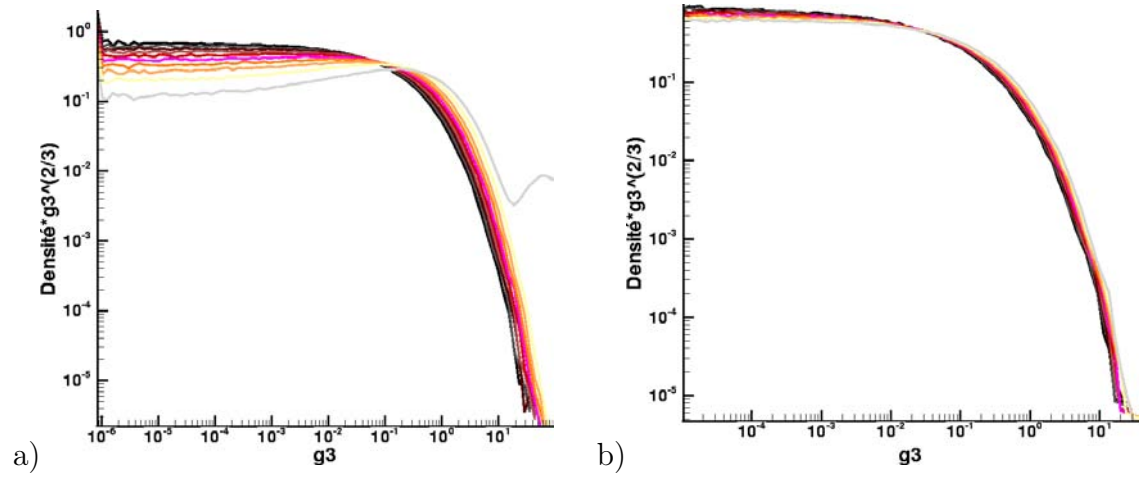


FIG. 3.10 – Evolution de $f(g_3) \cdot g_3^{2/3}$ en fonction de g_3 . a) ϵ imposé. b) A imposé.

a)

N	c_0	c_1
128	0.53	-0.86
256	0.60	-0.92
512	0.66	-1.04
1024	0.71	-1.10
2048	0.74	-1.11

b)

N	c_0	c_1
128	0.111	$8.8 \cdot 10^{-3}$
256	0.173	$9.1 \cdot 10^{-3}$
512	0.214	$9.3 \cdot 10^{-3}$

TAB. 3.4 – Valeurs des paramètres du préfacteur de la régression en loi puissance des petites conductances. a) ϵ imposé. b) A imposé.

effectifs (chapitre 5).

3.3 Calcul de la conductance à l'échelle du pavé

On calcule maintenant la conductance à l'échelle du pavé comme présenté en section 2.3.2. Pour chaque cas, on effectue N_r réalisations pour effectuer les moyennes, pour différentes tailles N de pavé. La qualité des résultats dépend étroitement de N_r , qui doit être suffisamment grand selon la taille N (plus N est petit, plus N_r doit être grand). Nous décrivons d'abord les résultats obtenus dans le cas de calculs sur le réseau aléatoire construit à partir des surfaces Gaussiennes aléatoires, pour des conductances électrique et hydraulique. Dans ce cas, les résultats présentés sont adimensionnés par l'écart-type de la distribution des ouvertures au col avant déformation donné dans la partie 3.2.1, page 46 : $\sigma_{h_0} = 0.102$. Pour la conductance

électrique, on s'intéresse à $G_1 = \frac{G_{e1}}{\sigma_{h_0}}$ et pour la conductance hydraulique à $G_3 = \frac{G_{e3}}{\sigma_{h_0}^3}$, où G_{ci} est la conductance calculée directement à partir du code. Ensuite, on présentera des résultats dans des cas classiques, afin de comprendre le comportement du système étudié.

3.3.1 Calcul de la conductance électrique G_1

En fonction de ϵ Tout d'abord, observons l'évolution de la moyenne de la conductance G_1 en fonctions du taux de liens actifs ϵ donnée sur la figure 3.11. Sur la figure

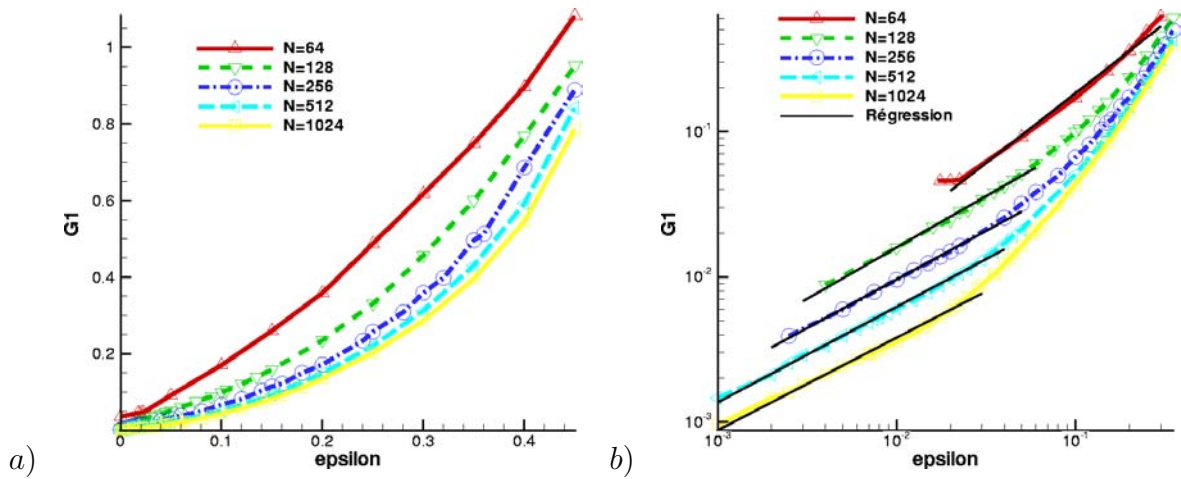


FIG. 3.11 – Evolution de la conductance électrique moyenne en fonction de ϵ . a) Représentation en coordonnées normales. b) Représentation bilogarithmiques + superposition des courbes de régression.

3.11-a, l'évolution globale est représentée pour différentes valeurs de N , allant de 128 à 1024. La figure 3.11-b montre que, comme attendu dans le cadre de la percolation, les résultats peuvent être représentés par des régressions en lois puissance du type $G = G_0 \epsilon^t$, près du seuil de percolation. Les résultats obtenus pour G_0 et t sont présentés dans le tableau 3.5-a. On constate une diminution avec N de l'exposant de la conductance t , qui évolue vers une valeur proche de 0.62 pour une taille infinie, selon $t = 0.62 + 2.44 N^{-0.68}$. Concernant le préfacteur G_0 , il évolue selon une loi puissance en fonction de N , comme $G_0 = 21.66 N^{-0.82}$. Dans ce cas, nous avons choisi d'attribuer les corrections de taille finie aussi à l'exposant t , et pas seulement au préfacteur G_0 . C'est un choix arbitraire qui peut facilement être modifié dans la

	N	G_0	t	N_r
a)	64	1.688	0.96	500-550
	128	0.412	0.71	460-600
	256	0.209	0.67	200-420
	512	0.129	0.66	211-760
	1024	0.072	0.64	46-61
b)	64	0.0240	0.906	200-600
	128	0.0148	0.911	300
	256	0.0108	0.767	200-1000
	512	0.0070	0.686	135-1000
	1024	0.0040	0.654	30-75

TAB. 3.5 – Valeurs des paramètres de la régression sur l'évolution de la conductance électrique. a) En fonction de ϵ . b) En fonction de $A - A_c$.

présentation des résultats. Ainsi, si on fait une régression du type $\overline{G_1} = G_0 \epsilon^{0.62}$, on obtient $\overline{G_1} = 8.76 N^{-0.72} \epsilon^{0.62}$.

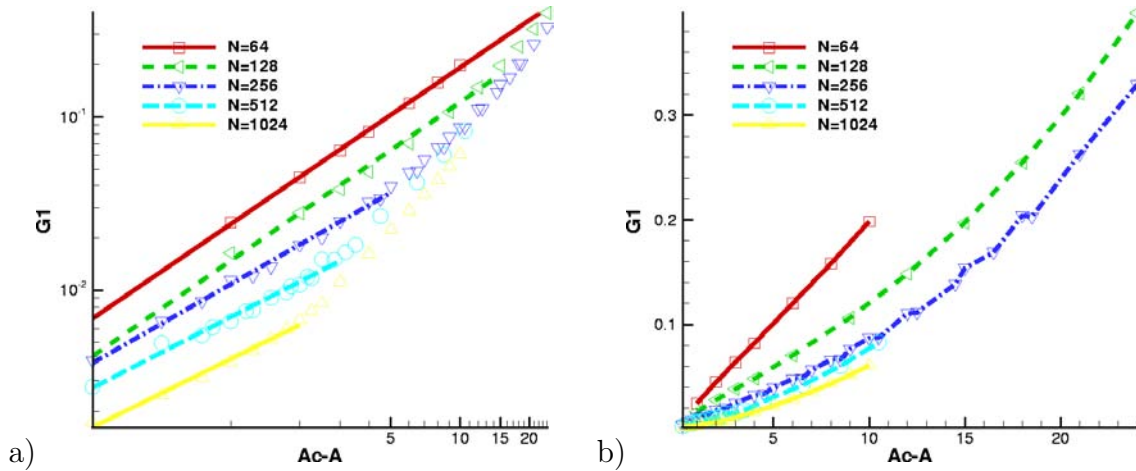


FIG. 3.12 – Evolution de la conductance électrique moyenne en fonction de $A_c - A$

En fonction de $(A_c - A)$ La figure 3.12-a montre l'évolution de la conductance moyenne globale de G_1 en fonction de $(A_c - A)$. La régression en loi puissance pour l'évolution près du seuil de percolation, selon la loi $G = G_0 (A_c - A)^t$ est représentée sur la figure 3.12-b. Les résultats obtenus sur G_0 et t sont présentés dans le tableau 3.5-b. Comme précédemment, on constate une diminution avec N de l'exposant de la conductance t , qui évolue vers une valeur proche de 0.62 pour une taille infinie, selon $t = 0.62 + 61.83 N^{-1.104}$. Concernant le préfacteur G_0 , il évolue selon une loi puissance en fonction de N , comme $G_0 = 0.325 N^{-0.63}$. En faisant une régression du type $\overline{G_1} = G_0 (A_c - A)^{0.62}$, on obtient $\overline{G_1} = 0.36 N^{-0.63} (A_c - A)^{0.62}$.

Comparaison des résultats On a donc :

$$\begin{aligned} \overline{G_1} &= 8.76 N^{-0.72} \epsilon^{0.62} \\ \overline{G_1} &= 0.36 N^{-0.63} (A_c - A)^{0.62} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Il est intéressant de noter que l'extrapolation à taille infinie de l'exposant t donne un résultat proche en fonction de ϵ ou bien de $A_c - A$. Cette observation est la manifestation de l'universalité de cet exposant de transport près du seuil de percolation. En revanche, en ce qui concerne le préfacteur, la dépendance à la taille est différente dans les deux cas, alors qu'on aurait pu s'attendre à la même dépendance. En effet, si on regarde la variation de $A_c - A$ en fonction de ϵ (ou inversement) on a :

$$\begin{aligned} \overline{A_c - A} &= 87.0 \epsilon \\ \overline{\epsilon} &= 0.0115(A_c - A) \end{aligned}$$

Toutefois, la différence entre les deux exposants de dépendance à N sont proches (-0.63 et -0.72). De plus, nous comparons des variables aléatoires et des valeurs moyennées, ce qui peut expliquer certaines différences.

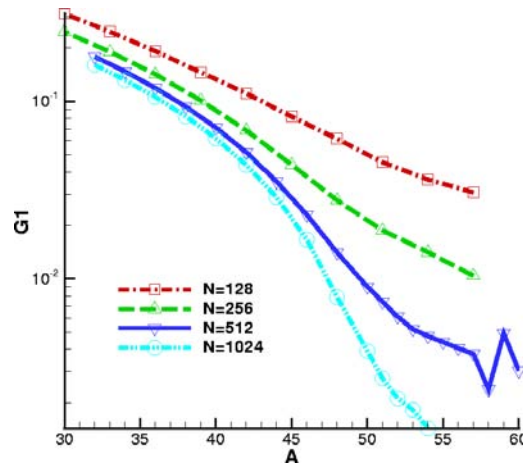


FIG. 3.13 – Evolution de la conductance électrique moyenne en fonction de la surface en contact

En fonction de A La figure 3.13 montre l'évolution de $\langle G_1 \rangle$ en fonction de l'aire en contact A . Les moyennes sont calculées en prenant en compte seulement les pavés conducteurs. Par rapport à une étude de percolation, ce résultat ne présente pas tellement d'intérêt. En revanche, dans le but d'établir une étude d'étanchéité,

celui-ci est intéressant. En effet, d'un point de vue technologique, on peut imposer une charge de serrage, et donc une aire de contact. Par contre, on ne sait pas imposer un écart au seuil de percolation.

Distribution de G_1 La figure 3.14-a représente l'évolution de la distribution de la conductance globale G_1 en fonction de ϵ . La courbe noire correspond à une situation

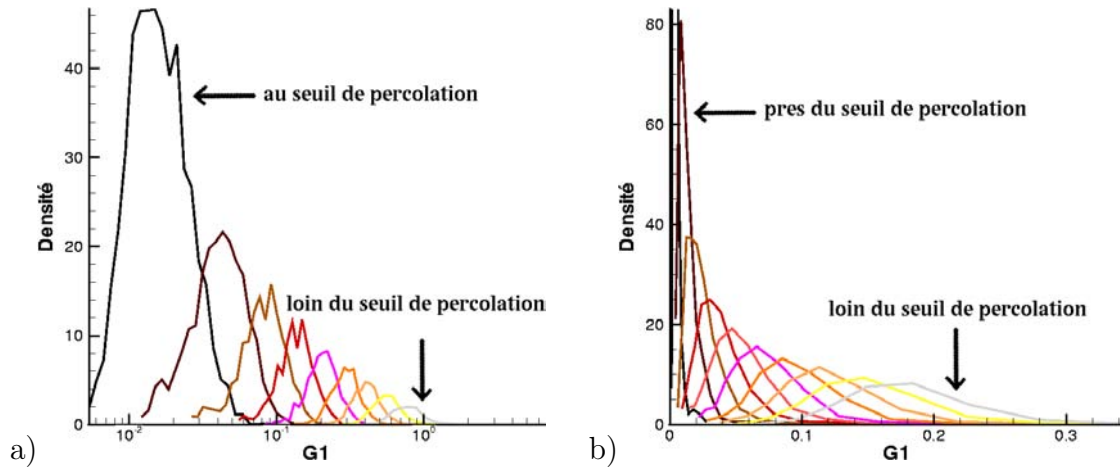


FIG. 3.14 – Distribution de la conductance électrique pour $N = 512$. a) ϵ imposé. b) $(A_c - A)$ imposé.

près du seuil, avec $\epsilon = 0.05$. La courbe en gris correspond à une situation loin du seuil, avec $\epsilon = 0.45$. On a des distributions de type log-normal, d'équation

$$f(G_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\ln(G_1)} G_1} \exp\left(-\frac{(\ln(G_1) - \overline{\ln(G_1(N, \epsilon))})^2}{2 \sigma_{\ln(G_1)}^2(N, \epsilon)}\right)$$

Les caractéristiques sont données dans le tableau 3.6. Les régressions sur la moyenne

N	$\overline{\ln(G_1)}$	$\sigma_{\ln(G_1)}$
64	$-\exp(-7.47 \epsilon + 1.42)$	$\exp(-0.09 \ln(\epsilon) - 0.63)$
128	$-\exp(-5.59 \epsilon + 1.50)$	$\exp(-0.06 \ln(\epsilon) - 0.79)$
256	$-\exp(-4.98 \epsilon + 1.57)$	$\exp(-0.30 \ln(\epsilon) - 1.45)$
512	$-\exp(-4.94 \epsilon + 1.63)$	$\exp(-0.44 \ln(\epsilon) - 2.01)$
1024	$-\exp(-4.96 \epsilon + 1.68)$	$\exp(-0.66 \ln(\epsilon) - 2.83)$

TAB. 3.6 – Valeurs de la moyenne et de l'écart-type de la distribution log-normale de G_1 en fonction de ϵ .

et l'écart-type sont données à titre indicatif, afin de constater leur évolution. Dans le cas où on voudrait les utiliser pour une étude précise, il faudrait affiner ces régressions.

Sur la figure 3.14-b, on a représenté l'évolution de la distribution de la conductance globale G_1 en fonction de $A_c - A$. La courbe noire correspond à une situation près du seuil, avec $A_c - A = 0.5\%$. La courbe en gris correspond à une situation plus loï du seuil, avec $A_c - A = 18.5\%$, sachant que, en moyenne, $A_c - A$ vaut au maximum 50%. Il ne s'agit ni d'une distribution normale, ni log-normale. Nous n'avons pas cherché à déterminer précisément le type de cette distribution car cela ne présentait pas d'intérêt direct pour la suite de l'étude.

3.3.2 Calcul de la conductance hydraulique G_3

En fonction de ϵ La figure 3.15-a montre l'évolution de la conductance hydraulique moyenne $\overline{G_3}$ en fonction de ϵ . Les régressions en loi puissance de cette évolution

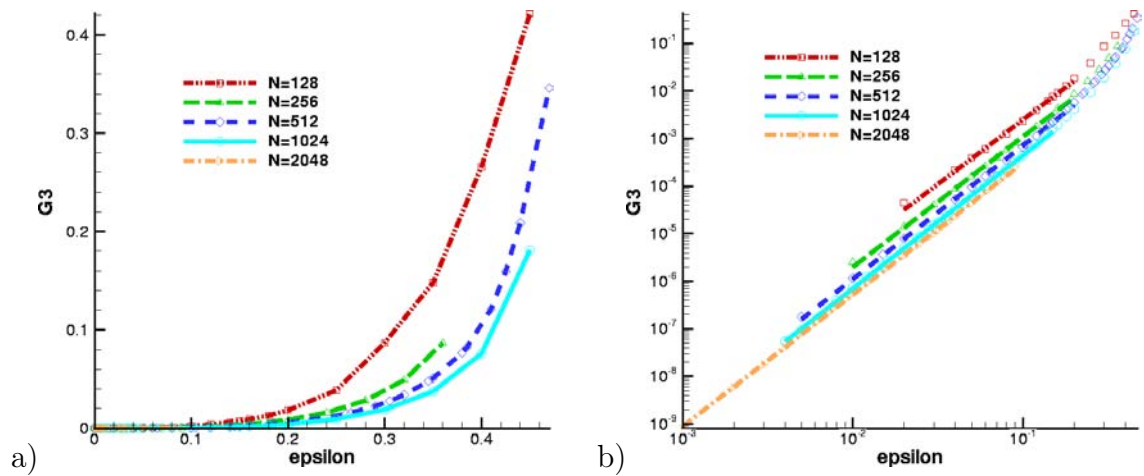


FIG. 3.15 – Evolution de la conductance hydraulique moyenne en fonction de ϵ . a) Evolution globale. b) Régression en loi puissance près du seuil de percolation.

sont représentées sur la figure 3.15-b, selon un diagramme log-log. Les caractéristiques de cette régression sont présentées dans le tableau 3.7-a. G_0 évolue comme $G_0 = 30.1 N^{-0.68}$. Pour t , il semble que la valeur asymptotique (taille infinie) peut être estimée comme $t_\infty = 2.80$. Pour $N = 2048$, l'estimation de t n'est pas très précise à cause de faibles statistiques. La valeur de t est sensible à la plage de valeurs choisies. Même le sens de l'évolution de t en fonction de N dépend de la plage

N	G_0	t	N_r
128	1.266	2.71	500-1200
256	0.597	2.74	1000-2000
512	0.450	2.80	200-1800
1024	0.277	2.80	50-250
2048	0.178	2.77	51-59

TAB. 3.7 – Valeurs des paramètres de la régression en loi puissance de l'évolution de la conductance hydraulique près du seuil. a) En fonction de ϵ . b) En fonction de $A_c - A$.

de valeur choisie. Si on réduit la plage du côté des petites valeurs, on peut obtenir une évolution de t allant de 3.0 à 2.8 avec l'augmentation de N . Ce dernier dernier élément nous a conduit à estimer $t_\infty = 2.80$. En faisant une régression sur G_3 avec $t = 2.8$, on obtient $\overline{G_3} = 25.3 N^{-0.66} \epsilon^{2.8}$. Concernant l'écart-type, on a $\sigma_{G_3} \simeq 5943.2 N^{-0.58} \epsilon^{2.32+0.05 \ln(N)}$.

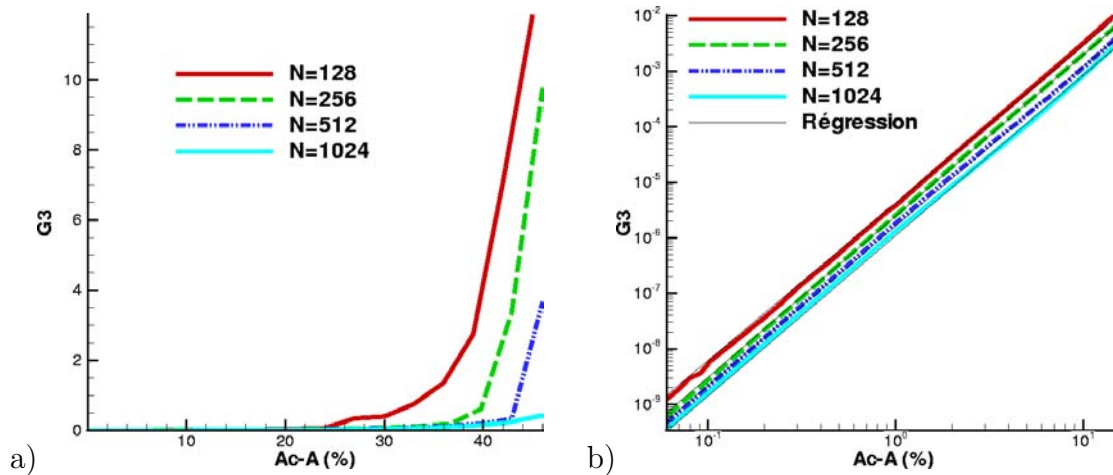


FIG. 3.16 – Evolution de la conductance moyenne hydraulique en fonction de $A_c - A$

En fonction de $(A_c - A)$ La figure 3.16-a montre l'évolution de la conductance moyenne globale de G_3 en fonction de $(A_c - A)$ et la figure 3.16-b la régression en loi puissance pour l'évolution près du seuil de percolation, selon la loi $G_3 = G_0 (A_c - A)^t$. Les résultats obtenus sur G_0 et t sont présentés dans le tableau 3.7-b. On constate que t varie légèrement avec N et évolue vers une valeur proche de 2.89 pour une taille

infinie. Concernant le préfacteur G_0 , il évolue selon une loi puissance en fonction de N , comme $G_0 = 9.8 \cdot 10^{-5} \cdot N^{-0.65}$. Si on fait une régression sur $\overline{G_3}$ en imposant $t = 2.89$, on obtient $\overline{G_3} = 5.7 \cdot 10^{-5} N^{-0.56} (A_c - A)^{2.89}$.

Comparaison des résultats On a donc :

$$\begin{aligned} \overline{G_3} &= 25.3 N^{-0.66} \epsilon^{2.8} \\ \overline{G_3} &= 5.7 \cdot 10^{-5} N^{-0.56} (A_c - A)^{2.89} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Contrairement au cas de la conductance électrique, la valeur asymptotique t_∞ diffère légèrement selon le paramètre utilisé. Les deux valeurs atteintes restent toutefois très proches. Il faudrait affiner les résultats afin de vérifier si la valeur de t_∞ est sensible au paramètre de contrôle, même s'il semblerait plus naturel qu'il n'en dépende pas. Malgré tout, un écart de 0.1 sur l'exposant de la percolation est très faible, surtout quand on regarde l'ensemble des calculs qui permettent d'accéder à ce résultat. Une précision de 0.1 semble très bonne. De plus, comme pour le préfacteur dans le cas électrique, on n'a pas la même loi puissance en N , avec tout de même des exposants dont les valeurs sont proches : -0.66 et -0.56 .

En fonction de A Sur la figure 3.17, on a représenté l'évolution de la conductance moyenne hydraulique en fonction de la surface en contact A . Dans le calcul de la moyenne, seules les surfaces percolantes ont été prises en compte. Ces résultats, regroupés dans le tableau 3.8, seront utiles dans la partie reconstruction à l'échelle du joint (section 3.4) où un des paramètres de contrôle utilisé est A . Les résultats

N	$\overline{G_3}$ près du seuil de percolation	$\overline{G_3}$ loin du seuil de percolation
256	$\exp(-0.25 A + 4.20)$	$\exp(-0.16 A + 0.63)$
512	$\exp(-0.35 A + 7.29)$	$\exp(-0.17 A + 0.52)$
1024	$\exp(-0.66 A + 20.97)$	$\exp(-0.19 A + 0.80)$

N	$\overline{\ln(G_3)}$	$\sigma_{\ln(G_3)}$
256	$-\exp(0.041 A + 0.17)$	$-1.15 + 1.79 \cdot 10^{-1} A - 7.55 \cdot 10^{-3} A^2 + 1.12 \cdot 10^{-4} A^3$
512	$-\exp(0.039 A + 0.32)$	$-0.440 + 7.66 \cdot 10^{-2} A - 3.19 \cdot 10^{-3} A^2 + 4.70 \cdot 10^{-5} A^3$
1024	$-\exp(0.038 A + 0.43)$	$-0.413 + 6.15 \cdot 10^{-2} A - 2.35 \cdot 10^{-3} A^2 + 3.13 \cdot 10^{-5} A^3$

TAB. 3.8 – Moyennes de $\overline{\ln(G_3)}$ et de $\overline{G_3}$ en fonction de la surface en contact A

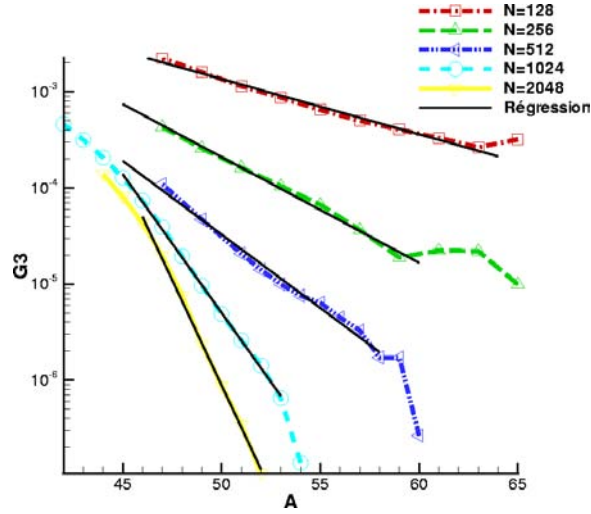


FIG. 3.17 – Evolution de la conductance hydraulique moyenne en fonction de l'aire de contact

sur la moyenne de G_3 permettent d'évaluer la limite entre les deux zones où s'applique chacun des deux types de distribution. Les valeurs de ces surfaces limites sont données dans le tableau 3.8. Elles correspondent à la solution de l'équation $\overline{G_{3ps}}(A = A_l(N)) = \overline{G_{3ls}}(A = A_l(N))$ où ps signifie près du seuil et ls loin du seuil.

Distribution La figure 3.18-a montre l'évolution de la distribution de G_3 en fonction de ϵ sur un graphe log-log, afin de visualiser cette évolution sur un seul graphe. On constate qu'on a une distribution de type log-normale, sauf au seuil de percolation. Dans ce cas, on a une distribution de type loi de puissance. Les caractéristiques de ces distributions sont données dans le tableau 3.9-a, avec $f(G_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\ln(G_3)} G_3} \exp\left(-\frac{(\ln(G_3) - \overline{\ln(G_3)})^2}{2\sigma_{\ln(G_3)}^2}\right)$. Les valeurs de l'écart-type sont données à titre indicatif. Il s'agit plutôt d'un ordre de grandeur.

N	$\overline{\ln(G_3)}$	$\sigma_{\ln(G_3)}$
128	$0.71 + 3.53 \ln(\epsilon)$	0.80
256	$-0.45 + 3.02 \ln(\epsilon)$	0.60
512	$-0.86 + 2.96 \ln(\epsilon)$	0.53
1024	$-1.69 + 2.80 \ln(\epsilon)$	0.52

TAB. 3.9 – Caractéristiques de la distribution log-normale de la conductance hydraulique à ϵ donné

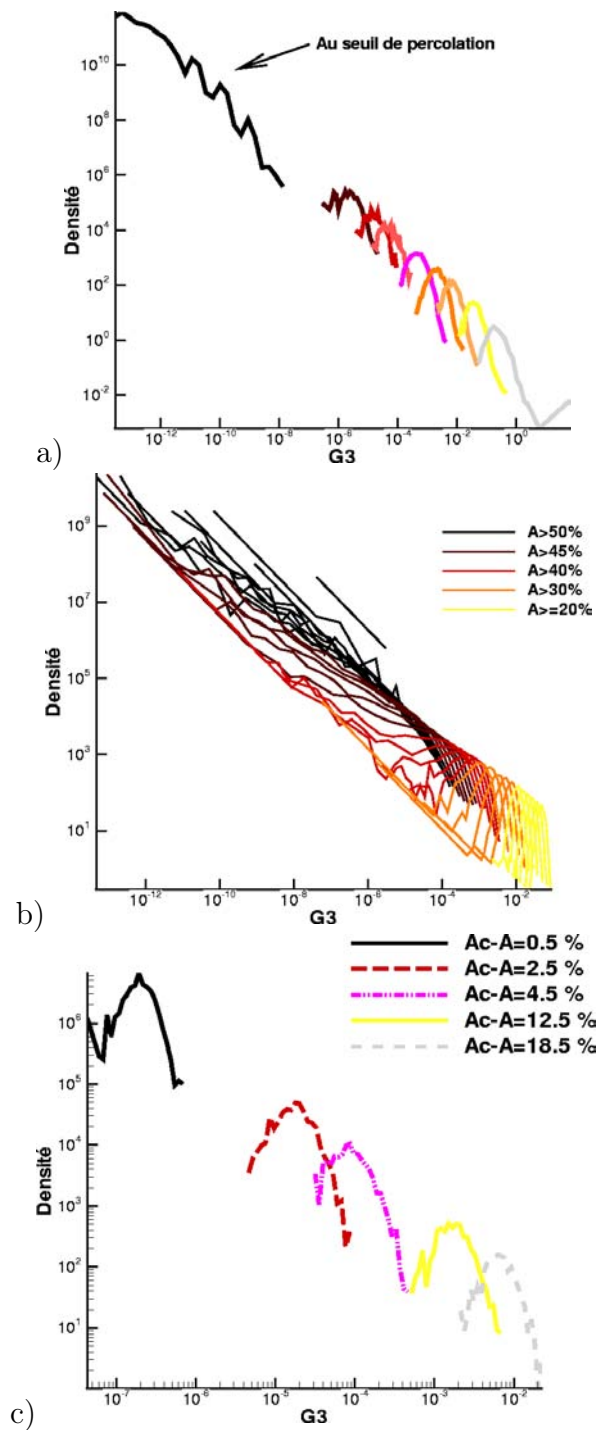


FIG. 3.18 – Distribution de la conductance hydraulique G_3 . a) En fonction de ϵ . b) En fonction de A . c) En fonction de $A_c - A$.

La figure 3.18-b représente l'évolution de la distribution de G_3 en fonction de l'aire de contact. Les résultats ont été obtenus en faisant 2600 réalisations, sur des pavés de taille $N = 512$, et ce pour des aires de contact allant de 20 à 60% de surface

en contact. Sur ce graphe bi-logarithmique, où seuls les résultats des pavés percolants sont pris en compte, on peut constater deux types de comportement. Lorsque l'aire de contact est importante, c'est à dire qu'on est proche du seuil de percolation, la distribution des conductances suit une loi puissance du type $f(G_3) \sim G_3^{-T}$. Lorsque l'aire de contact est faible, c'est-à-dire qu'on est loin du seuil de percolation, on a des distributions log-normales. La limite entre ces deux zones se situe à $A = A_l$ dont les valeurs sont données dans le tableau 3.10.

N	256	512	1024
A_l	40	43	46

TAB. 3.10 – Valeur de la surface en contact critique

Pour la suite du travail (*cf.* section 3.4), on a besoin de connaître les régressions sur les distributions en loi puissance. Nous avons donc déterminé les exposants de cette loi de puissance. Ces derniers varient de -1 à $-2/3$ pour les plages de valeur de A qui nous intéressent. On utilise les régressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 N = 256 & : T = \frac{2}{3} + 1.4 \cdot 10^{-4} \exp(0.125 A) \\
 N = 512 & : T = \frac{2}{3} + 4.0 \cdot 10^{-7} \exp(0.236 A) \\
 N = 1024 & : T = \frac{2}{3} + 1.4 \cdot 10^{-6} \exp(0.223 A)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Le choix de ces fonctions est tout à fait arbitraire, d'autant plus que la dépendance exponentielle avec A est discutable. Mais c'est ce type de fonction qui permet d'avoir l'approximation la plus simple, sur toute la gamme considérée.

La figure 3.18-c représente l'évolution de la distribution de G_3 en fonction de l'écart au seuil de percolation, avec $A_c - A$ imposé. La distribution suit une loi log-normale, comme pour le paramètre de contrôle ϵ . On ne donne pas les paramètres de cette distribution, dans la mesure où ils ne nous servent pas pour la suite de l'étude. Au cas où on en aurait besoin, on peut toujours les calculer à partir de la moyenne et de l'écart-type de la conductance hydraulique moyenne.

3.3.3 Comparaison avec des cas classiques

Réseau carré avec conductance locale uniforme et constante La figure 3.19 montre l'évolution de la conductance globale d'un réseau régulier carré où les

conductances locales valent 1 si le lien est conducteur, 0 dans le cas contraire. Les deux résultats présentés ont été obtenus pour des tailles de surface de $N = 50$ et $N = 90$, avec 85 réalisations pour $N = 90$ et au moins 100 réalisations pour $N = 50$. On constate que loin du seuil de percolation, on a une évolution en loi affine de la conductance moyenne. Près du seuil, on a une évolution de type loi puissance, en

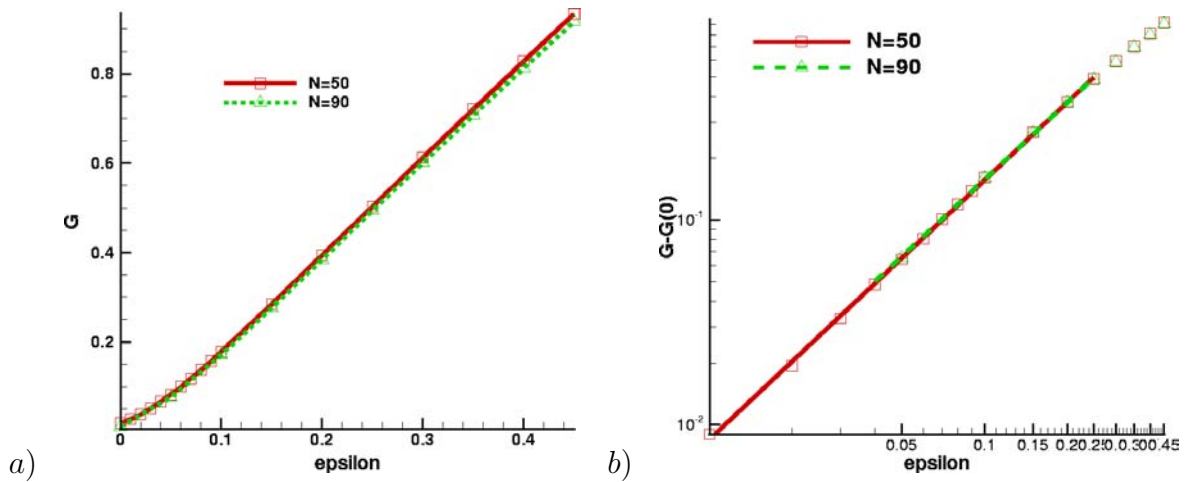


FIG. 3.19 – Evolution de la conductance en fonction de l'écart au seuil ϵ pour un réseau régulier carré dont la conductance locale des liens vaut 0 ou 1. a) Représentation de $G(\epsilon)$. b) Représentation log-log de $G(\epsilon) - G(0)$.

$G(\epsilon) - G(0) = G_0 \epsilon^t$, comme on peut le constater sur la figure 3.19-b. Les valeurs observées de t sont $t = 1.26$ pour $N = 50$ et $t = 1.25$ pour $N = 90$. Un point intéressant à constater est que l'effet de taille finie semble principalement avoir un impact sur la valeur de $G(0)$, et pas sur la valeur du préfacteur de la loi puissance ou sur l'exposant de la conductance t .

Réseau carré avec conductance locale uniforme et variable en fonction de l'écart au seuil de percolation Dans ce cas, il s'agit d'un réseau carré régulier, mais contrairement au cas précédent, la conductance des liens conducteurs n'est pas figée à 1, mais évolue en fonction de l'écart au seuil de percolation. Elle est égale à l'écart au seuil de percolation, c'est-à-dire la distance séparant la surface supérieure S_1 du seuil de percolation. L'évolution de la conductance globale est montrée sur la figure 3.20. Ces résultats ont été obtenus sur des réseaux de taille $N = 70$, en faisant

des moyennes sur au moins 50 réalisations. On constate que dans ce cas, on n'a plus une évolution linéaire de la conductance moyenne globale, mais une évolution en loi puissance, comme cela est mis en évidence sur la figure 3.20-b. L'exposant de la loi puissance vaut 1.4 lorsqu'on est près du seuil de percolation, et 2.1 quand on s'en éloigne.

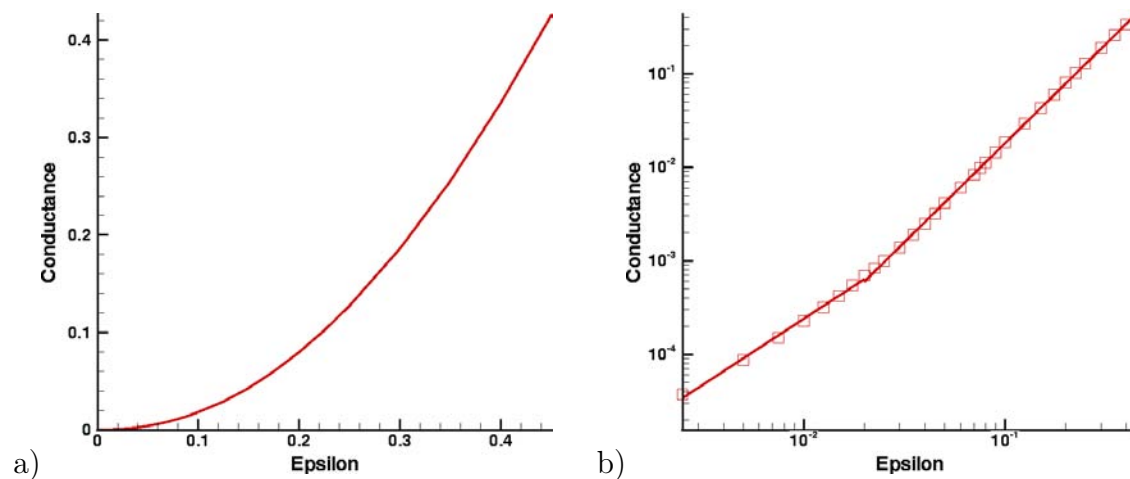


FIG. 3.20 – Evolution de la conductance en fonction de l'écart au seuil ϵ pour un réseau régulier carré dont la conductance locale des liens est égale à l'ouverture.

Réseau aléatoire avec conductance locale uniforme et constante Dans ce cas, le réseau de percolation est construit à partir de la surface aléatoire, et son évolution dépend de la modification du champ des ouvertures. En revanche, la conductance locale des liens vaut 1 si le lien est conducteur, et 0 dans le cas contraire. Sur la figure 3.21-b, on a représenté l'évolution de la conductance moyenne, selon un graphe bi-logarithmique. Les exposants de la loi puissance sont les suivants : 1.17 pour $N = 128$, 1.24 pour $N = 256$, 1.26 pour $N = 512$ et 1.30 pour $N = 1024$. Il faut noter que pour les petites surfaces, la loi puissance ne peut être observée trop près du seuil.

Réseau aléatoire avec conductance aléatoire et constante Dans ce cas, le réseau est construit à partir de la surface aléatoire, mais l'évolution du réseau, ainsi que les conductances locales sont distribuées de façon aléatoire selon une loi uniforme. Dans ce cas, les conductances locales sont "gelées". On obtient les évolutions présentées sur la figure 3.22. La régression en loi puissance nous donne $G - G(0) = 0.36 \epsilon^t$,

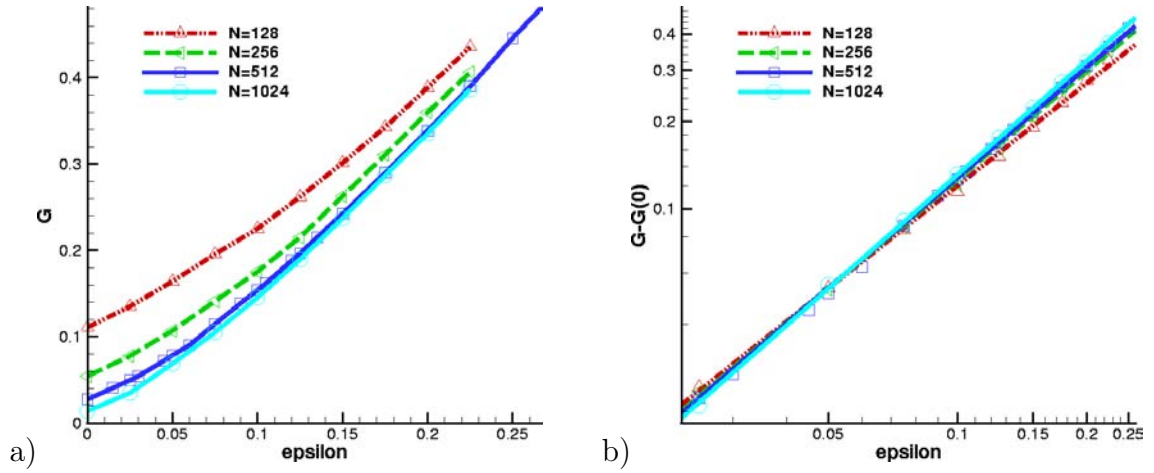


FIG. 3.21 – Caractéristiques des systèmes aléatoires dont la conductance locale vaut 0 ou 1. a) Représentation de l'évolution de la moyenne. b) Représentation bi-logarithmique de $G - G(0)$.

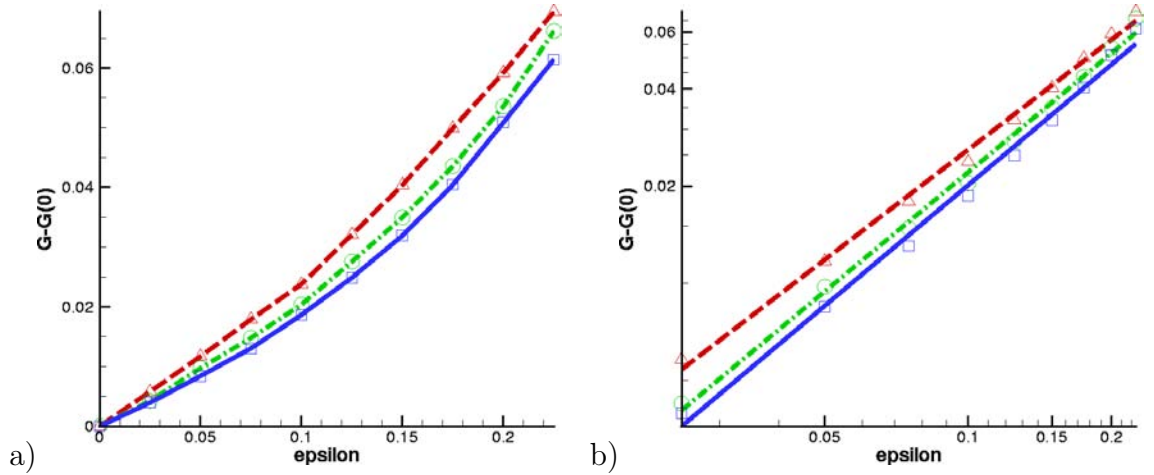


FIG. 3.22 – Evolution de la conductance moyenne.

avec $t = 1.13$ pour $N = 128$, $t = 1.22$ pour $N = 256$ et $t = 1.24$ pour $N = 512$.

Comparaison des résultats Dans les quatre cas qu'on vient de présenter, on obtient des conductances qui évoluent selon des lois puissances, soit du type $G(\epsilon) = G_0 \epsilon^t$, soit du type $G(\epsilon) - G(0) = G_0 \epsilon^t$. Dans les quatre cas, on a des exposants qui se rapprochent de $t = 1.3$, valeur classique de l'exposant de la conductance [30].

3.3.4 Discussion

Près du seuil de percolation, on s'attend à une évolution en loi puissance de la conductance (électrique ou hydraulique) moyenne (moyenne d'ensemble sur un grand nombre de réalisations) en fonction de l'écart au seuil de percolation, c'est-à-dire à une expression de la forme,

$$\frac{G_3}{\sigma_{h_0}^3} \propto (A_c - A)^t \quad (3.7)$$

où σ_{h_0} est l'écart type des rugosités (avant écrasement). Dans la littérature, e.g [30], la valeur proposée pour l'exposant "universel" t (c'est-à-dire ne dépendant en principe que de la dimension de l'espace (2 dans notre cas) et non des détails du réseau ou du système) est $t \approx 1.3$. C'est la valeur que nous avons retrouvée dans les calculs numériques de la section 3.3.3. Pour ces situations classiques, la diminution de la conductance près du seuil est entièrement due à l'évolution structurelle du réseau, qui devient de plus en plus mal connecté, comme cela est illustré sur la figure 3.23.

Dans notre cas, la valeur que nous trouvons est $t \approx 0.62$ pour la conductance électrique et $t \approx 2.8$ pour la conductance hydraulique. Ce résultat indique donc que le système étudié conduit à un changement de classe d'universalité. La différence notable (plus d'un facteur 2!) entre la valeur classique ($t \approx 1.3$) et celles que nous avons obtenues mérite des explications. Une différence originale entre notre système et les systèmes étudiés dans la littérature est le fait que la conductance locale des liens varie avec l'écart au seuil de percolation : elle augmente lorsqu'on s'éloigne du seuil de percolation. Dans les cas étudiés dans la littérature, ces conductances locales sont "gelées". Elles n'évoluent pas au fur et à mesure que le nombre de liens actifs du réseau diminue. On pourrait donc penser que, dans notre cas, nous avons une combinaison de deux effets : l'effet classique dû à l'évolution de la structure du réseau (qui devient de plus en plus mal connecté) combiné à la diminution des conductances locales. Ceci ne constitue toutefois pas le seul élément d'explication de notre résultat. En effet, si on fait le calcul en considérant des conductances uniformes (la même pour tous les liens actifs) variant par exemple comme $\overline{h_0}^3$ où $\overline{h_0}$ est l'ouverture moyenne des cols en fonction de l'écart au seuil, on retrouve l'exposant classique 1.3. En référence avec des travaux précédents, [13],[32], [7], la caractéristique essentielle conduisant à un exposant non-classique dans le cas hydraulique est la distribution de probabilité en loi puissance des conductances hydrauliques locales, $f(g_3) \sim g_3^{-\alpha}$, avec $\alpha = -2/3$.

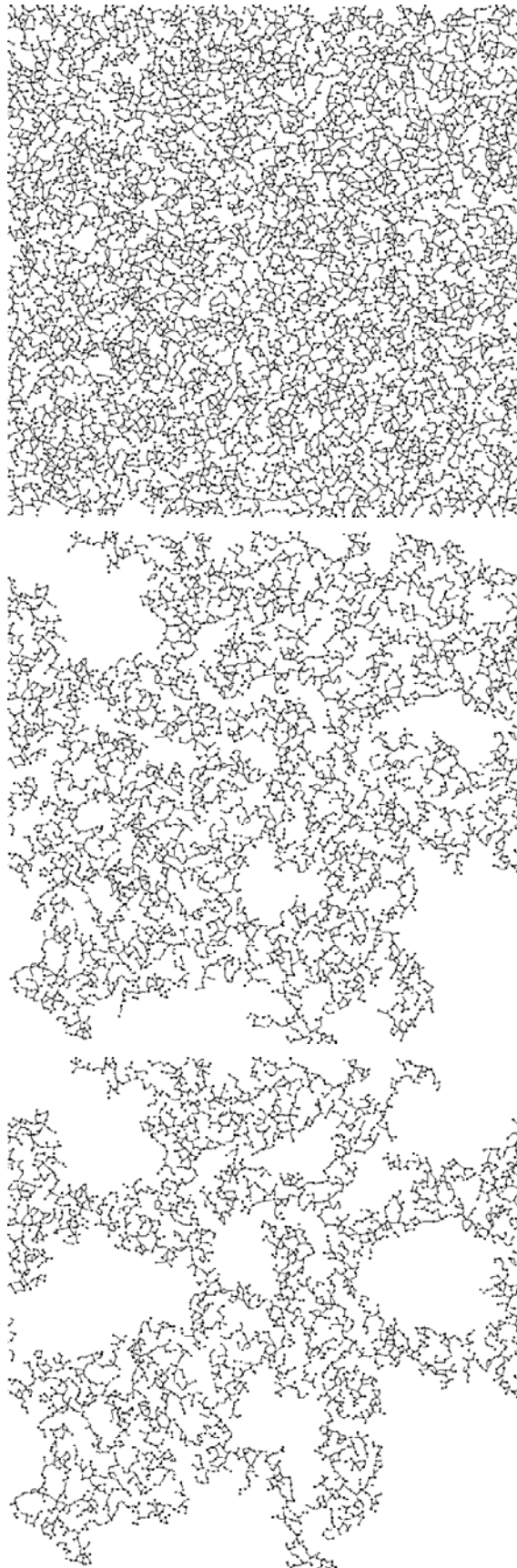


FIG. 3.23 – Exemple d'évolution du réseau au fur et à mesure que l'on se rapproche du seuil de percolation ($N = 1024$).

En effet, d'après ces travaux de nature théorique, lorsque la conductance g des liens d'un réseau de résistances aléatoires est distribuée sur une large gamme sous la forme d'une loi puissance $g^{-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, l'exposant de la conductance est compris entre les bornes $(d - 2) + \max(1/(1 - \alpha), t_u) \leq t \leq t_u + \alpha/(1 - \alpha)$, où d est la dimension de l'espace et t_u désigne la valeur classique 1.3. Des résultats plus récents, [31], ont montré, comme cela était d'ailleurs suggéré dans [7], que la valeur attendue correspond en fait à la borne inférieure, soit dans le cas d'un système 2D, $t = \max(1/(1 - \alpha), t_u)$. L'augmentation de l'exposant par rapport au cas classique est expliquée physiquement par le fait que lorsqu'on approche du seuil de percolation, la décroissance de la conductance est plus rapide car en plus d'une structure de plus en plus mal connectée, la conductance moyenne des conductances locales participant à l'amas percolant diminue elle-aussi. Pour $\alpha = 2/3$, ceci conduit à $t = 3$. Ce résultat est proche de nos résultats numériques ($t = 2.8; 2.9$) mais néanmoins légèrement supérieur. Ceci suggère l'existence d'un exposant particulier associé à notre système. Ceci est confirmé lorsqu'on considère des conductances locales de la forme $g_2 = h_0^2 \sqrt{-\frac{h_{xx}}{h_{yy}}}$. On trouve dans ce cas des distributions de conductance locale de la forme $f(g_2) \sim g_2^{-0.5}$, ce qui d'après la prédiction théorique précédente conduirait à un exposant de conductance $t = 2$. Les résultats numériques (non montrés ici) conduisent ici encore à une valeur inférieure $t \approx 1.7$.

Le cas électrique correspond au cas $\alpha = 0$, cas pour lequel le résultat théorique ne s'applique pas. Nos résultats numériques conduisent à une valeur $t \approx 0.62$, nettement inférieure à la valeur standard 1.3. On a donc une augmentation contrariée de l'évolution de la conductance avec l'écart au seuil par rapport au cas classique. Ce résultat reste cependant difficile à comprendre à partir de la distribution des conductances locales et manque pour l'instant de support théorique.

3.4 Calcul de la conductance hydraulique à l'échelle du joint

Tout le début de ce chapitre a été consacré aux statistiques à l'échelle du pavé. Nous avons déterminé la probabilité de percolation, la distribution des conductances locales, la distribution des conductances globales. L'objectif est, *in fine*, d'établir des statistiques équivalentes à l'échelle du joint. Nous allons donc montrer comment

reconstruire le joint.

Il faut préciser que le travail de reconstruction n'a été fait que pour la conductance hydraulique. En effet, ces résultats sont utiles dans le cadre de l'étude technologique, mais n'apporte pas d'éléments nouveaux dans l'optique d'une étude sur les joints rugueux. Il serait tout de même facile de conduire le même travail pour la conductance électrique si cela s'avérait intéressant.

3.4.1 Quelques statistiques

Dans cette partie, nous allons tout d'abord déterminer quelques relations analytiques sur les statistiques auxquelles on peut s'attendre. On montrera ensuite qu'elles sont effectivement vérifiées.

Définition de la conductance hydraulique d'un joint Supposons un joint composé de N_p pavés indépendants, comme montré sur la figure 3.24. Parmi ces pavés, on en a N_c qui sont percolants. La conductance de ces derniers vaut G_{3i} (i variant de 1 à N_c). La conductance à l'échelle du joint G_{3jc} est une moyenne des conductances de chacun des pavés le composant. Elle est donc égale à :

$$G_{3jc} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_c} G_{3i} \quad (3.8)$$

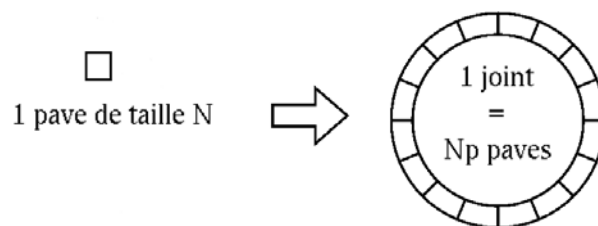


FIG. 3.24 – Schéma de reconstruction du joint.

Détermination de la probabilité de percolation Le système est formé de N_p éléments ayant une probabilité P_p d'être percolant. Le système est percolant si au moins un des éléments est percolant. La probabilité de non-percolation du joint obéit ainsi à une loi de Bernoulli de paramètre $(1 - P_p)^{N_p}$, et la probabilité de percolation

du joint P_{jc} vaut donc :

$$P_{jc} = 1 - (1 - P_p)^{N_p} \quad (3.9)$$

On constate que la probabilité de percolation du joint P_{jc} augmente avec N_p , donc avec sa taille.

Détermination de la statistique sur N_c N_c est le nombre de pavés percolants parmi les N_p pavés composant le joint, et ayant une probabilité P_p d'être percolants. Sa statistique obéit donc à une loi binomiale de paramètres N_p et P_p . La probabilité d'avoir $N_c = i$, avec i variant de 0 à N_p vaut :

$$P_{N_p=i} = C_{N_p}^i P_p^i (1 - P_p)^{N_p-i}$$

où C_n^i est le nombre de combinaisons de i éléments parmi n . L'espérance de N_c vaut

$$E(N_c) = N_p P_p$$

et son écart-type

$$\sigma_{N_c} = \sqrt{N_p P_p (1 - P_p)}$$

Moyenne sur G_{3jc} La relation 3.8 définit la conductance hydraulique à l'échelle du joint. Supposons qu'on ait un joint percolant. Sa conductance, qu'on appelle alors G_{3jcp} vaut :

$$G_{3jcp} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_c} G_{3i} = \frac{N_c}{N_p} \sum_{i=1}^{N_c} \frac{G_{3i}}{N_c}$$

avec $N_c \geq 1$. Etant donné qu'on a des variables aléatoires indépendantes, on peut écrire :

$$\overline{G_{3jcp}} = \overline{\left(\frac{N_c}{N_p}\right) \left(\sum_{i=1}^{N_c} \frac{G_{3i}}{N_c}\right)} = P_p \overline{G_3} \quad (3.10)$$

ce qui permet d'écrire, en s'appuyant sur $\overline{G_{3jc}} = P_{jc} \overline{G_{3jcp}}$:

$$\overline{G_{3jc}} = \frac{P_p}{P_{jc}} \overline{G_3} \quad (3.11)$$

Bien que la moyenne des conductances hydrauliques des joints G_{3jc} dépende du nombre de pavés composant le joint, on constate donc que la moyenne des conductances hydrauliques des joints percolants G_{3jcp} ne dépend pas de ce nombre N_p .

Dans le but d'alléger les écritures, G_3 et G_{3jcp} feront référence, dans la suite de la rédaction, aux moyennes des conductances.

Ecart-type de G_{3jc} A partir de la relation 3.10, on peut écrire l'écart-type de G_{3jcp} :

$$\sigma_{G_{3jcp}} = \sqrt{\frac{1}{N_p} P_p (1 - P_p) \sigma_{G_3}^2} = \frac{\sigma_{N_c} \sigma_{G_3}}{N_p}$$

En s'appuyant sur $G_{3jc} = P_{jc} G_{3jcp}$, on obtient :

$$\sigma_{G_{3jc}} = \sqrt{P_{jc}^2 \frac{1}{N_p} P_p (1 - P_p) \sigma_{G_3}^2} = \frac{P_{jc} \sigma_{N_c} \sigma_{G_3}}{N_p}$$

ce qui donne

$$\sigma_{G_{3jc}} = \frac{(1 - (1 - P_p)^{N_p}) \sqrt{P_p (1 - P_p)} \sigma_{G_3}}{\sqrt{N_p}}$$

On a une diminution (pour N_p suffisamment grand) de l'écart-type de la conductance du joint $\sigma_{G_{3jc}}$ avec le nombre de pavés N_p composant le joint. On observe la même chose pour l'écart-type de la conductance des joints percolants $\sigma_{G_{3jcp}}$.

3.4.2 Reconstruction du joint

Les lois précédentes peuvent être validées par comparaison avec une étude statistique sur un grand nombre de réalisations de joints. Pour établir des statistiques, on se base sur une approximation analytique des distributions de la conductance à l'échelle du pavé. On utilise un générateur de nombre aléatoire qui va permettre de tirer la conductance de chacun des pavés composant le joint. Le générateur est utilisé de sorte que les distributions soient respectées.

Pour effectuer la reconstruction d'un joint complet, on se place à une aire de contact donnée. On considère que celle-ci est identique pour chaque pavé composant le joint. On choisit le nombre de pavés composant le joint et leur taille. Étant donnés ces paramètres, on effectue un tirage aléatoire sur chaque pavé : d'une part sur le fait qu'il soit conducteur ou non et d'autre part sur la valeur de sa conductance (seulement dans le cas où il est conducteur). Pour effectuer ces tirages, on utilise les expressions analytiques concernant la probabilité de percolation des pavés ainsi que les approximations analytiques des distributions des conductances qui ont été présentées précédemment.

La probabilité de percolation P_p en fonction de l'aire de contact A est donnée

par :

$$\begin{aligned}
 P_p &= \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf}(x)) \\
 x &= \frac{100 - A - P_a}{\sqrt{2} \Delta} \\
 P_a &= 50.16 - 54.01 N^{-0.673} \\
 \Delta &= \exp(5.159) N^{-0.673}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

où P_a est le seuil moyen de percolation, N la taille de la surface et Δ la largeur de transition. Il s'agit des données présentées dans la section 3.1.1, à la page 40.

En ce qui concerne la distribution de la conductance, on distingue deux régimes, selon l'écrasement du joint, donc selon l'aire de contact conformément aux résultats de la section 3.3.2. En dessous d'une aire de contact critique $A_l(N)$, c'est-à-dire loin du seuil de percolation, on approxime les distributions par des lois log-normal. Au dessus de cette aire de contact, on approxime les distributions par des lois puissances. Les valeurs utilisées pour cette aire critique sont données dans le tableau 3.10, page 60. On a :

$$\begin{aligned}
 A \leq A_l(N) &: f(G_3) = \frac{1}{A \sqrt{2\pi \sigma_{\ln(G_3)}}} \exp\left(-\frac{(\ln(G_3) - \overline{\ln(G_3)})^2}{2\sigma_{\ln(G_3)}^2}\right) \\
 A > A_l(N) &: f(G_3) = C G_3^{-T}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

où $\sigma_{\ln(G_3)}$ est l'écart-type, $\overline{\ln(G_3)}$ la moyenne, C le préfacteur et T l'exposant. Les valeurs des différents paramètres sont données dans les tableaux 3.8 et 3.9. Il faut ensuite s'assurer que les lois de distributions utilisées ont bien une intégrale de 1. On impose donc une borne supérieure b_s à la distribution $f(G_3)$. b_s doit donc être choisie de manière à vérifier la relation suivante :

$$\int_0^{b_s} f(G_3) dG_3 = 1 \tag{3.14}$$

A ce stade, on peut donc déterminer aisément b_s . Seulement, dans le cas où $A > A_l(N)$, on a :

$$\int_0^{b_s} f(G_3) dG_3 = \int_0^{b_s} C G_3^{-T} dG_3 = 1 \tag{3.15}$$

Or, on souhaite vérifier la relation suivante sur la moyenne de la conductance :

$$\int_0^{b_s} G_3 f(G_3) dG_3 = \int_0^{b_s} C G_3^{1-T} dG_3 = \overline{G_3} \tag{3.16}$$

On se retrouve donc face à un problème à une seule inconnue (b_s), mais deux équations ((3.15) et (3.16)). On va donc reformuler ce problème en imposant deux inconnues : b_s et le préfacteur de la distribution C . Nous avons donc fait le choix

de conserver la moyenne et les exposants qui avaient été déterminés, car il nous a semblé que c'étaient les variables les plus représentatives. D'autres choix auraient aussi pu être faits : conserver le préfacteur et recalculer l'exposant T . Concernant la moyenne, il semble important qu'elle ne soit pas affectée par la régression utilisée.

Cette méthode va nous permettre d'évaluer le comportement global des joints, selon ses différentes caractéristiques. Mais elle est limitée quant à son exploitation quantitative sur toute la gamme de contact. En effet, on s'appuie sur les régressions des distributions pour deux régimes distincts, ce qui oblige à faire des régressions, notamment sur les moyennes des distributions, parfois assez éloignées des résultats obtenus, du moins dans la zone de transition entre les deux régimes. Mais cette approche va toutefois permettre de valider les résultats attendus et présentés dans la section 3.4.1.

3.4.3 Probabilité de percolation

La figure 3.25 montre l'évolution de la probabilité de percolation des joints en fonction de la surface en contact. On constate que, comme à l'échelle du pavé, on a

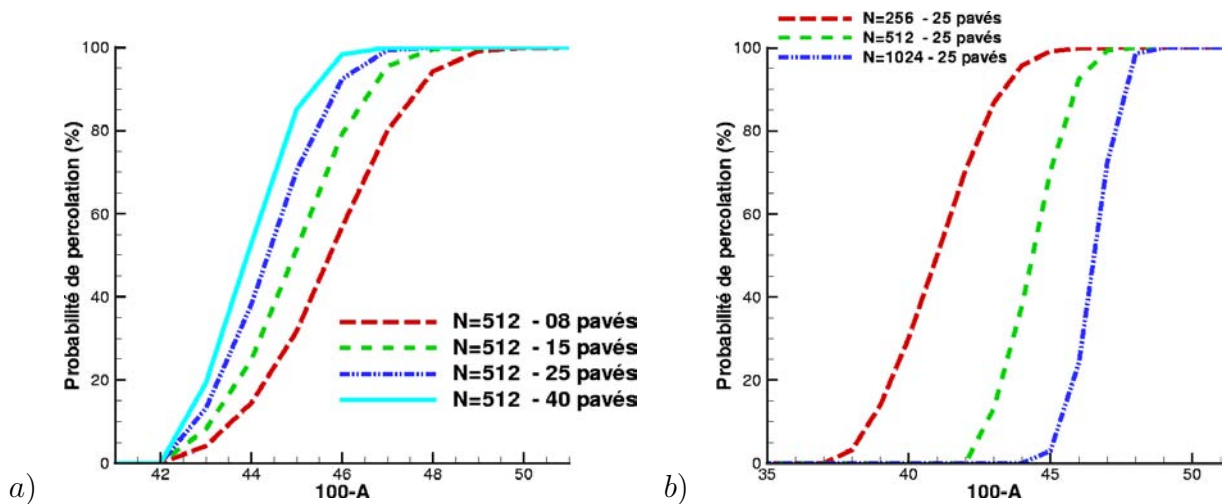


FIG. 3.25 – Evolution de la probabilité de percolation des joints en fonction de la surface en contact A . a) En fonction du nombre de pavés N_p . b) En fonction de la taille des pavés N .

une évolution qui suit une fonction erf. L'évolution de ces paramètres est représentée sur la figure 3.26. On constate que la probabilité de percolation augmente avec le

nombre de pavés constituant le joint. Plus le joint est grand, plus on risque d'avoir une fuite. Ceci est logique dans la mesure où, à portée égale, plus le joint est grand, plus on a de chance de trouver au moins un pavé conducteur. On constate aussi que, plus la taille des pavés est petite, plus la probabilité de percolation est grande. Dans

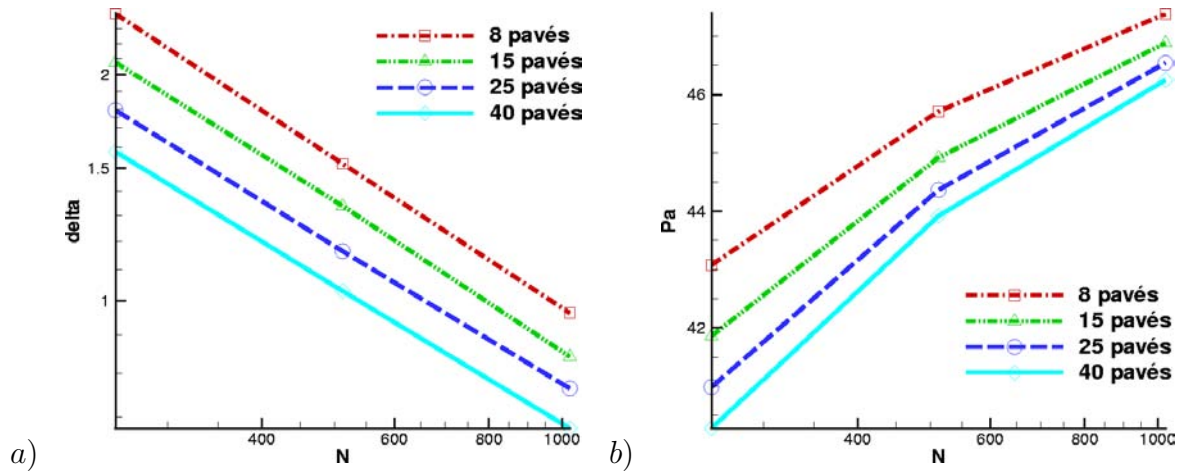


FIG. 3.26 – Evolution des paramètres de la régression de la probabilité de percolation tous les cas, on constate une décroissance de la largeur de transition Δ avec N_p . Cette décroissance se fait selon une loi puissance d'exposant -0.2 . De même, on constate que Δ diminue avec N , la taille des pavés. Ce comportement est identique à celui obtenu à l'échelle des pavés. Concernant la valeur moyenne du seuil de percolation P_{av} , il augmente avec N , comme à l'échelle des pavés. Il diminue avec N_p , ce qui s'explique par le fait que, plus on a de pavés, plus on a de chance d'en avoir un percolant.

La figure 3.27 compare la probabilité de percolation obtenue à partir des statistiques sur les réalisations des joints et l'expression (3.9) d'autre part. On a une très bonne adéquation entre les deux, même si la probabilité apparente est légèrement inférieure à la probabilité calculée à l'aide de l'expression (3.9) lorsque la surface en contact A devient grande, c'est à dire qu'on est proche du seuil de percolation. Il se peut que cette différence provienne simplement d'un effet statistique.

3.4.4 Moyennes

La figure 3.28 montre l'évolution de la conductance moyenne hydraulique des joints percolants. Sur la figure a), on peut observer trois cas pour des tailles de

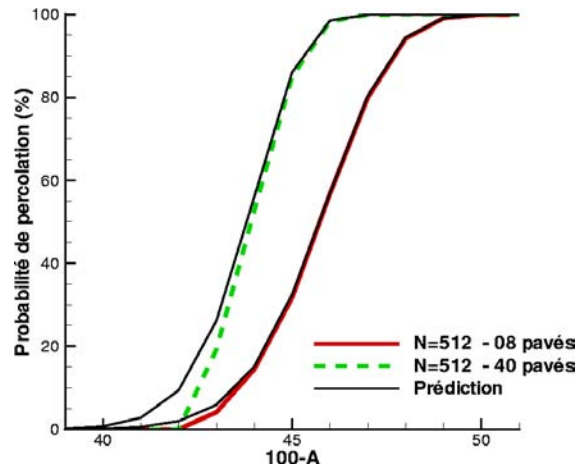


FIG. 3.27 – Comparaison de la percolation du joint. La courbe "prédiction" correspond aux résultats obtenus avec l'expression (3.9).

pavés $N = 512$, avec 8, 25 ou 40 pavés par joints. On ne constate presque aucune dépendance des résultats au nombre de pavés N_p composant le joint. Sur le graphe b), on a représenté l'évolution selon la taille du système. On constate dans ce cas une dépendance importante à la taille des pavés. De plus, sur ce graphe figure les résultats issus de l'expression (3.10).

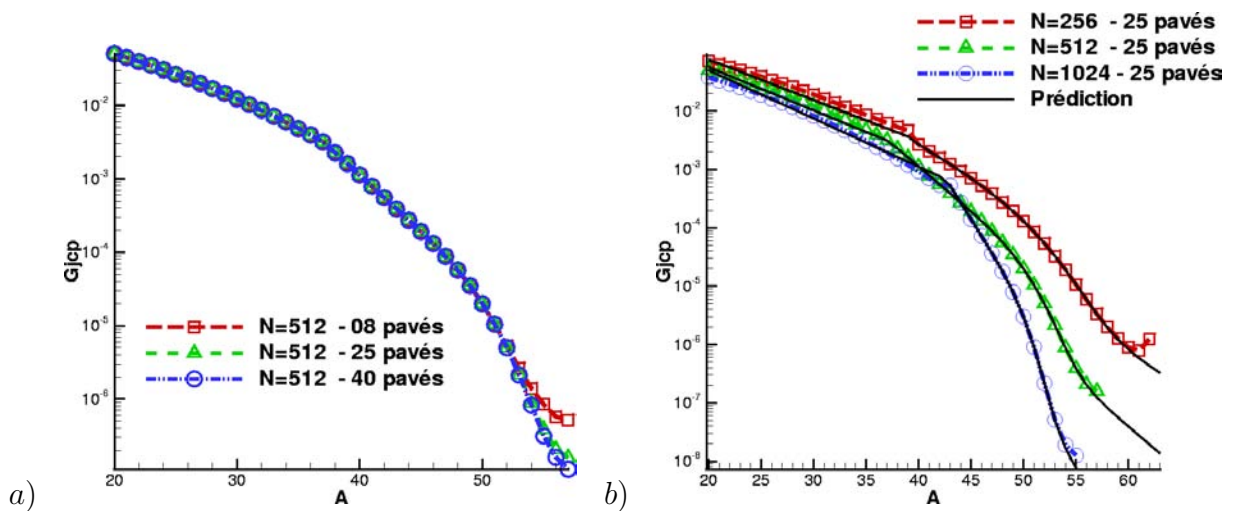


FIG. 3.28 – Conductance moyenne des joints percolants en fonction de la surface en contact A . a) $N = 512$, N_p variable. b) $N_p = 25$, N variable. La courbe "prédiction" correspond aux résultats obtenus avec l'expression (3.10).

Les résultats présentés sur la figure 3.28 sont donc concordants avec l'expression (3.10). Cette expression indique que la moyenne de la conductance hydraulique à l'échelle du joint, et pour les joints percolants, ne dépend pas du nombre de pavés composant le joint. Elle indique aussi que cette moyenne dépend de la taille des pavés, par l'intermédiaire de G_3 . Le fait que la conductance ne dépende pas de N_p se comprend aisément à partir de sa définition. Il s'agit en effet d'une conductance linéique, qui ne dépend pas de la "longueur" (à relier à N_p) sur laquelle on se place pour la calculer. Il faut tout de même souligner qu'on n'a regardé que l'évolution de G_{3jcp} et pas de G_{3jc} . On n'a donc considéré ici que les joints percolants. Si on considère l'ensemble des joints (percolants et non percolants), on aura une dépendance de la moyenne au nombre de pavés composant le joint. Et la dépendance est d'autant plus forte que A augmente.

3.4.5 Distributions

La figure 3.29 montre la distribution de la conductance hydraulique à l'échelle d'un joint dont les pavés sont de taille $N = 512$. On constate qu'on a des distributions gaussiennes lorsqu'on est loin du seuil de percolation, et des distributions gaussiennes tronquées lorsque la surface en contact devient plus importante. On peut noter toutefois que la variabilité de la conductance du joint est très faible comparée à celle obtenue à l'échelle du pavé (*cf.* figure 3.18-b). A l'échelle du joint, la conductance est en effet dominée par les pavés les plus conducteurs. En d'autres termes, d'un point de vue pratique, la seule estimation de la moyenne G_{3jc} est suffisante pour donner le comportement du joint.

3.4.6 Une autre méthode

Dans tout ce qui précède, on a proposé une méthode de reconstruction s'appuyant sur les distributions de la conductance hydraulique $f(G_3)$. On impose la surface en contact, et on reconstruit pavé par pavé : on tire aléatoirement le fait qu'il y ait conductance ou non pour le pavé, et dans le cas positif, on tire sa conductance. La qualité des résultats est liée à la qualité des régressions effectuées sur les distributions. Dans cette section, nous allons présenter une autre méthode s'appuyant sur les résultats de la conductance moyenne hydraulique G_3 près du seuil de percolation :

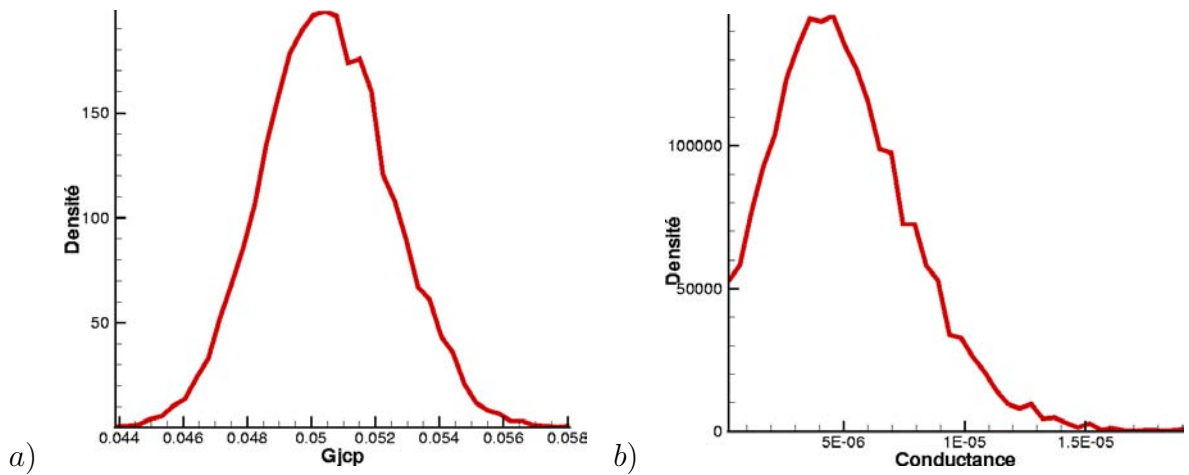


FIG. 3.29 – Distribution de la conductance des joints percolants. a) Pour $A = 20\%$. b) Pour $A = 52\%$.

$G = G_0 (A_c - A)^t$. Elle permet de s'affranchir des distributions de la conductance à l'échelle du pavé. Comme précédemment, on impose la surface en contact, et on reconstruit pavé par pavé. Pour chaque pavé, nous tirons son seuil de percolation, et ensuite, nous utilisons la relation présentée dans la section 3.3.2 et les données du tableau 3.7 pour calculer sa conductance hydraulique, dans le cas où le seuil de percolation A_c est supérieur au pourcentage de surface en contact A . On obtient donc directement la conductance hydraulique du pavé, sans avoir recours aux distributions de la conductance. Pour la taille $N = 512$ et $N_p = 25$ pavés, on obtient les résultats présentés sur la figure 3.30. On a donc une très bonne adéquation entre les deux méthodes, y compris loin du seuil de percolation, ce qui est, à priori surprenant puisque la régression en loi puissance n'est valable que près du seuil de percolation.

Cette deuxième méthode possède le gros avantage de ne pas faire référence aux distributions de la conductance à l'échelle du pavé, seulement aux distributions du seuil de percolation. Il est donc beaucoup plus facile d'avoir des statistiques de bonne qualité. De plus cette approche n'a plus à considérer la délicate transition entre deux types de distributions.

La figure 3.31 représente l'évolution de la conductance hydraulique en fonction de la surface en contact A , calculée avec la deuxième méthode. Il s'agit de joints composés de 25 pavés, de taille $N = 128$ à $N = 1024$. Il faut souligner que les

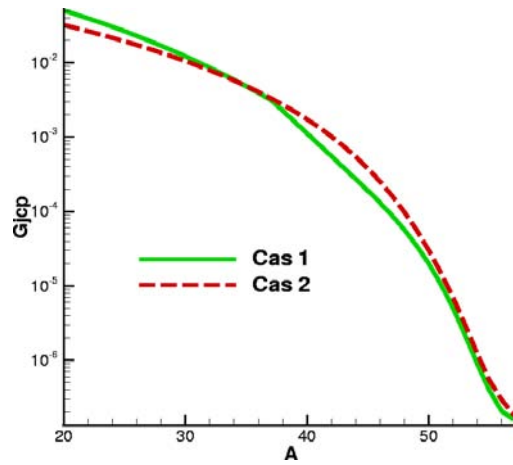


FIG. 3.30 – Conductance hydraulique moyenne à l'échelle du joint calculée par deux méthodes. 1- Celle précédemment décrite. 2- Celle décrite dans ce paragraphe.

résultats sont identiques quel que soit le nombre N_p de pavés composants le joint.

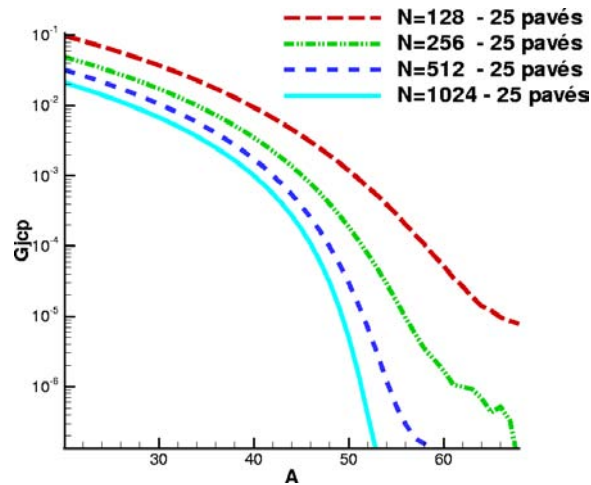


FIG. 3.31 – Evolution de la conductance hydraulique à l'échelle du joint en fonction de la surface en contact, pour différentes tailles de pavés.

3.4.7 Comparaison

On vient de présenter deux méthodes pour la reconstruction du joint. La première est basée sur les distributions de la conductance hydraulique G_3 en fonction de l'aire en contact A à l'échelle du pavé. La deuxième est basée sur la moyenne de la conductance hydraulique G_3 en fonction de l'écart au seuil de percolation A_c –

A. A priori, la première méthode, qui semble plus naturelle vis-à-vis du problème technologique, paraît plus exacte car on utilise directement les distributions, et pas une moyenne. Seulement, afin de faciliter la mise en œuvre des calculs, on utilise des régressions, ce qui apporte un certain nombre d'incertitudes. Il en résulte des erreurs sur la conductance hydraulique G_{3jc} à l'échelle du joint. La deuxième méthode paraît plus approximative puisqu'on détermine la conductance des pavés à l'aide d'une relation sur la conductance moyenne. Qui plus est, cette relation n'est valable que lorsqu'on est près du seuil de percolation. Seulement, les résultats sur les moyennes présentent moins d'imprécisions. Il en résulte qu'on a des résultats très proches dans les deux cas, comme montré sur la figure 3.30. Les plus grosses différences se situent d'une part loin du seuil de percolation (pour A peu élevée), là où la relation en loi puissance entre $A_c - A$ et G_3 n'est plus valable, et d'autres part, dans la zone de transition entre les deux régimes de distribution des conductances, quand on passe d'une distribution de type log-normale à une distribution de type loi puissance.

3.5 Conclusion

Ce chapitre a mis en évidence, conformément à ce qu'on attend dans le cadre de la théorie de la percolation, des évolutions en loi puissance près du seuil de percolation. Elles concernent aussi bien la probabilité de percolation que l'évolution des conductances hydrauliques et électriques près du seuil de percolation à l'échelle des pavés. Toutefois, les exposants de la conductance trouvés sont différents de ceux rencontrés dans la littérature. Dans le cas hydraulique, l'exposant est cependant proche (2.8; 2.9 contre 3.0) de la prédiction théorique pour un réseau aléatoire de conductances dont la distribution de la conductance locale est en loi puissance ($f(g_3) \sim g_3^{-2/3}$). La valeur de l'exposant pour le cas électrique ($t \approx 0.62$) est plus surprenante puisqu'inférieure au cas standard ($t = 1.3$). Il est à noter qu'une spécificité de notre système par rapport à ceux étudiés dans la littérature est que la conductance locale des liens varie avec l'écart au seuil de percolation. Quoi qu'il en soit, il est intéressant de noter le comportement non-universel des fractures Gaussiennes, une spécificité qui ne semble pas avoir été identifiée dans la littérature.

Dans une perspective plus appliquée, nous avons également montré comment les résultats obtenus à l'échelle des pavés pouvaient être combinés simplement pour

prédire la probabilité de percolation ainsi que l'évolution des conductances à l'échelle d'un joint formé par un ensemble de pavés indépendants.

Chapitre 4

Les déformations élastiques

Lorsque deux surfaces sont mises en contact et qu'on leur applique une pression de serrage, celles-ci se déforment. Pour modéliser ces déformations, nous avons privilégié, dans un premier temps, une approche simplifiée fondée sur un simple écrêtage géométrique. Dans ce cas, lorsque des zones sont en contact, on considère que le champ d'ouverture h devient nul dans les zones de contact. Ce modèle très simpliste facilite grandement les études statistiques, dans la mesure où le coût de calcul dû aux déformations est nul. Il reste évidemment à évaluer la qualité de l'approximation représentée par le modèle d'érosion géométrique. En d'autres termes, quel est l'impact d'une prise en compte plus réaliste des déformations ?

Dans ce contexte, d'autres modèles couramment utilisés prennent en compte des déformations élastiques et élasto-plastiques des solides en contact. Souvent, on considère que lorsqu'on met en charge deux éléments, on débute par des déformations élastiques jusqu'à atteindre la limite de plasticité. Au delà de ce seuil, on a alors des déformations de type plastique.

Dans le cadre de ce travail, on s'est proposé d'étudier l'impact des déformations élastiques afin de mieux approcher le comportement réel. Il est à noter que l'impact des déformations élastiques sur la perméabilité d'une fracture Gaussienne a déjà fait l'objet d'un certain nombre d'études, voir en particulier [21]. Toutefois, le comportement de la conductance près du seuil de percolation en présence de déformations élastiques ne semble pas avoir été documenté. Ce chapitre est précisément une première tentative dans cette direction.

4.1 Formulation du problème de contact

Lorsque deux solides non conformes sont mis en contact, ils se touchent initialement en 1 point ou le long d'une ligne. Sous l'action d'une charge, si petite soit-elle, ils se déforment au niveau du contact afin de se toucher sur une aire finie, mais petite comparée aux dimensions des solides. Nous allons montrer comment déterminer la forme de l'aire de contact et son évolution avec la charge.

4.1.1 Mise en place du problème

Les surfaces formant le contact (et donc le champ d'ouverture initial, avant contact) sont les mêmes que celles décrites dans les chapitres précédents, ce qui implique notamment qu'on a des faibles pentes, hypothèse dont on se sert pour résoudre le problème.

Considérons le champ d'ouverture h formé par les deux surfaces S_1 et S_2 (voir figure 4.2). La mise sous charge W_t de ces deux surfaces se traduit par un rapprochement moyen H . Lorsque les surfaces entrent en contact, il se produit une déformation, qui se traduit par un déplacement u de la surface déformable. Dans la zone de contact, on a alors :

$$u(x, y) = H - h(x, y)$$

En dehors des zones de contact, on a :

$$u > H - h(x, y)$$

De façon plus générale, on peut écrire que la distance d entre les surfaces est donnée par la relation :

$$d(x, y) = h(x, y) - H + u(x, y) \quad (4.1)$$

avec d nulle dans la zone de contact, et positive en dehors. Pour résoudre ce problème, il est nécessaire de déterminer la distribution de la pression transmise entre les deux corps au niveau de leur contact, de façon à ce que les déplacements élastiques résultants normaux à leur surface de contact satisfassent l'équation 4.1. Pour cela, on utilise la relation de Boussinesq [10] qui permet de relier les déplacements élastiques u au point (x, y) au champ de pression P au point (x', y') par la relation :

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi E^*} \iint \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad (4.2)$$

où E^* le module d'Young de la surface somme défini par la relation 1.1, page 8. Pour écrire cela, on s'appuie sur l'hypothèse de massif élastique, homogène et semi-infini. Cela implique, entre autre que les pentes de surfaces sont faibles et que l'aire de contact est petite devant les autres dimensions des corps. On peut relier p à W_t , la charge totale appliquée sur l'ensemble, par la relation :

$$\int_S p(x, y) dx dy = Wt$$

On obtient donc :

$$d(x, y) = h(x, y) - H + \frac{1}{\pi E^*} \iint \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad (4.3)$$

4.1.2 Résolution du problème

Pour résoudre ce problème, on procède de façon itérative sur une surface discrétisée, selon le maillage présenté dans le chapitre 2. Sur chacun de ces éléments (i, j) , on suppose que la pression est constante. Le déplacement u des éléments est calculé à partir des relations (4.1) et (4.2). La relation (4.2) s'exprime aisément sous forme d'un produit de convolution entre la pression et l'inverse des distances dans l'espace de Fourier :

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= 2 \frac{1}{\pi E^*} \tilde{p} * \frac{1}{k} \\ \tilde{u}_{ij} &= 2 \frac{1}{\pi E^*} \tilde{p}_{ij} \frac{1}{k_{ij}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

où k_{ij} ¹ est le module du vecteur d'onde associé à (i, j) dans l'espace de Fourier. Une transformée inverse permet alors l'estimation du champ $u(i, j)$. A partir de (4.1), on trouve alors :

$$d(i, j) = h(i, j) - H + u(i, j) \quad (4.5)$$

De plus, dans les zones de contact, d est nul et p est positive. En dehors des zones de contact, d est positive et p est nulle. Enfin, la pression doit vérifier la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ij} = \frac{W_t}{N^2} \quad (4.6)$$

Pour résoudre ce problème, on utilise le code de calcul développé dans le cadre du GDR par P.Sainsot [18]. La résolution du système formé par les relations (4.4), (4.5) et (4.6) est effectué en utilisant une méthode de Jacobi sous-relaxée. La charge

¹La transformée de Fourier de $\frac{1}{\|\vec{x}\|}$ en deux dimensions est $\frac{2}{k}$.

appliquée W_t implique une pression moyenne $p_{moy} = \frac{W_t}{N^2}$, qu'on note p_{ij}^0 . La première étape consiste à appliquer cette pression moyenne sur chacun des éléments, ce qui donne un déplacement u_{ij}^0 , calculée par la relation (4.4). On calcule alors d_{ij}^0 par la relation (4.5). Il reste alors à incrémenter la procédure en calculant le champ de pression p_{ij}^1 . Pour cela, on écrit la relation de Boussinesq sur d pour une pression unité. On a :

$$d = \frac{1}{\pi E^*} \int \int \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}$$

relation qu'on intègre sur un carré de taille $1/N$ (le pas du maillage). On obtient donc :

$$d = \frac{2}{N \pi E^*} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)$$

On appelle alors $A_{ij} = \frac{2}{N \pi E^*} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)$ le coefficient d'influence centrale. Ainsi, on peut écrire que le déplacement d_{ij}^0 est induit par une pression de d_{ij}^0/A_{ij} . On aboutit alors au calcul de p_{ij}^1 par :

$$p_{ij}^1 = p_{ij}^0 - \frac{\omega}{A_{ij}} d_{ij}^0$$

où ω est le coefficient de sous relaxation ($\omega \in [0, 1]$). En pratique, on utilise $\omega = 0.01$. p_{ij}^1 est ensuite écrété au dessus d'un certain seuil de sorte, d'une part à imposer la charge W_t définié en 4.6, et d'autre part à ne garder que des valeurs positives au champ de pression de contact. Le nouveau champ de pression obtenu est p_{ij}^1 . A l'issue de cette itération, on a bien imposé la charge W_t , mais les zones de contacts où d_{ij}^0 est nul ne correspondent pas forcément à celles où p_{ij}^1 est strictement positif. C'est pourquoi on itère alors la procédure. Le critère d'arrêt se situe sur la valeur du rapport $\frac{\max_{ij}(p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^n)}{\max_{ij}(p_{ij}^{n+1})}$. On impose à ce rapport une valeur maximale de 10^{-3} .

4.2 Mise en oeuvre dans le code

Dans le chapitre 2, à la page 20, on donne l'enchaînement des étapes de calcul du code développé. Avec l'introduction de déformations élastiques, cet enchaînement est un peu plus compliqué. Celui-ci est présenté sur la figure 4.1. En effet, à chaque fois qu'on éloigne ou qu'on rapproche les plans moyens des surfaces en contact, il faut recalculer la surface (champ d'ouverture plus champs dérivés), contrairement au cas de l'érosion géométrique. Ainsi, pour calculer le seuil de percolation, on choisit une charge, on déforme la surface, on regarde si la surface est percolante, et on itère.

Précédemment, on choisissait un niveau de troncature, on regardait si la surface était percolante, et on recommençait. D'où des calculs un peu plus lourd à mettre en oeuvre. Il en est de même pour le calcul de la conductance.

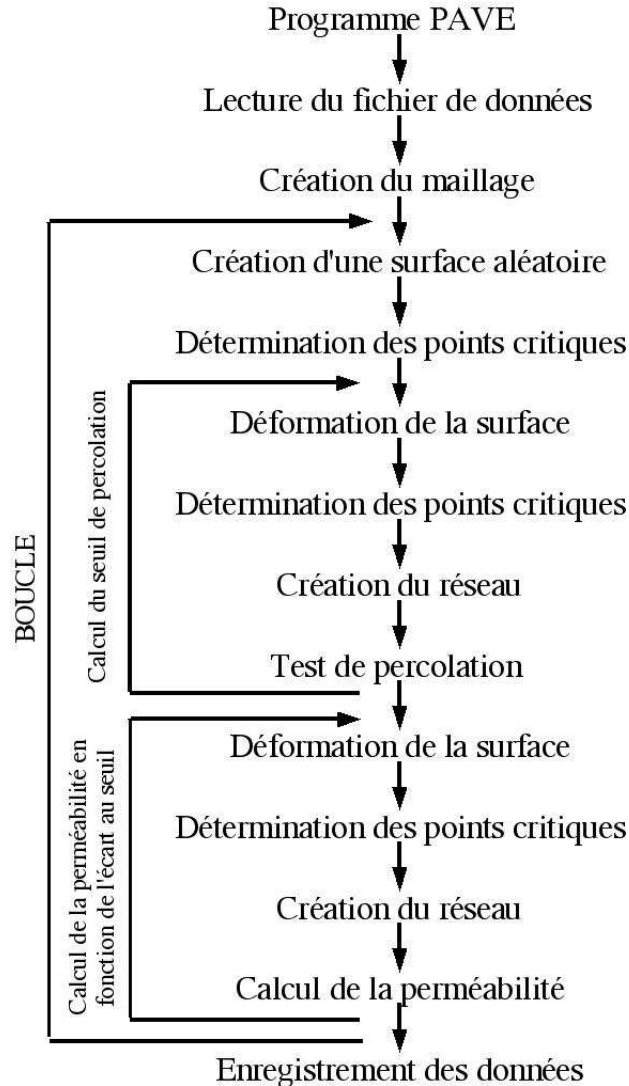


FIG. 4.1 – Structure générale du code de calcul dans le cadre de déformations élastiques

4.2.1 Visualisation de l'impact des déformations élastiques

Sur la figure 4.2, on a représenté l'évolution d'un profil extrait du champ des ouvertures lors d'un rapprochement des surfaces d'une hauteur H . Le pavé est de taille $N = 256$. On peut constater que, contrairement au cas de l'érosion géométrique,

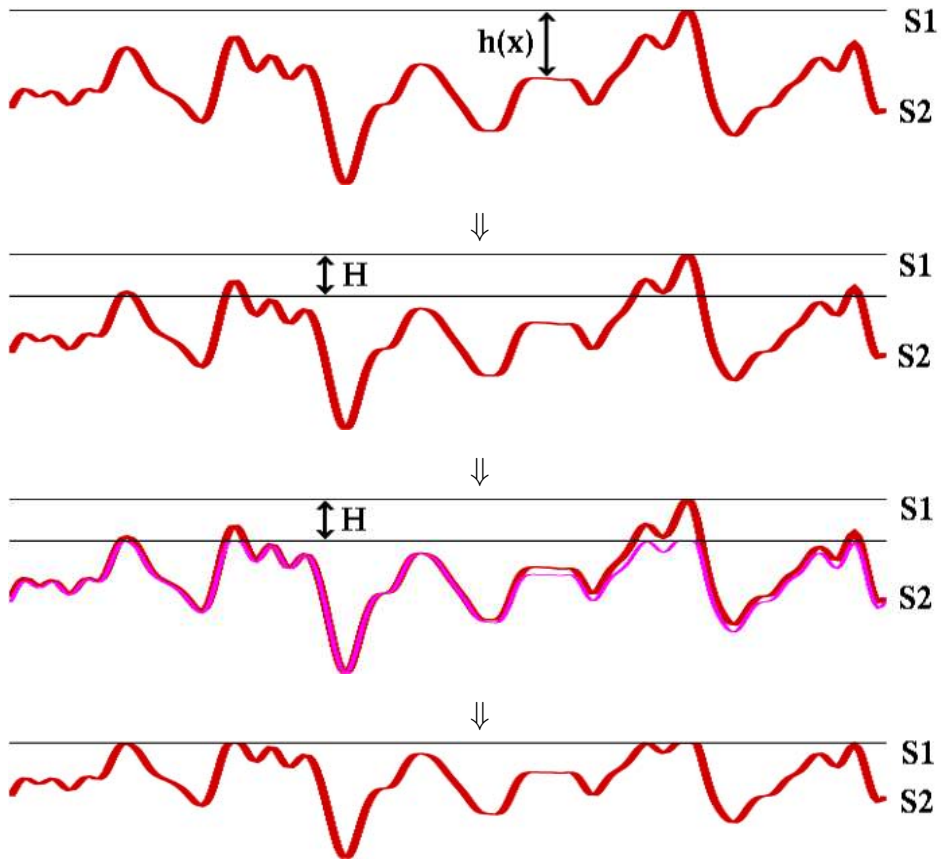


FIG. 4.2 – Evolution du champ des ouvertures en déformations élastiques

on a une modification de la surface somme en dehors des zones de contact. On voit nettement l'inter-dépendance des aspérités, à savoir que la déformation de l'une a un impact sur celles qui se trouvent autour d'elle.

4.2.2 Adimensionnalisation des résultats

Les résultats présentés dans ce rapport sont adimensionnalisés en fonction de la charge nécessaire pour avoir un enfoncement égal à l'écart-type de notre surface, c'est-à-dire $\delta = \sigma_{h_0}$. Cette charge est calculée selon la théorie de Hertz. Pour une sphère de module d'Young E^* , de rayon R_c soumise à une charge W_t , on a un enfoncement δ et un rayon de l'aire de contact r_a tels que :

$$r_a^3 = \frac{3R_c}{2E^*} W_t$$

Par ailleurs, la géométrie localement parabolique de la sphère en contact implique une relation simple entre l'aire de contact et le rayon R_c :

$$r_a^2 = \delta R_c$$

On choisit un enfoncement $\delta = \sigma_{h_0}$. On introduit la pente moyenne $pe = \frac{\sigma_{h_0}}{R_c} = \frac{1}{2\pi}$, ce qui donne $r_a^2 = \frac{\sigma_{h_0}^2}{pe}$, d'où la charge W_0 correspondant à l'enfoncement σ_{h_0} :

$$W_0 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} E^* \sigma_{h_0}^2 \quad (4.7)$$

Dans tout ce qui suit, nous présenterons donc les résultats en fonction de la charge réduite w , reliée à la charge réelle W par la relation :

$$w = \frac{W}{W_0}$$

4.2.3 Relation charge - déplacement

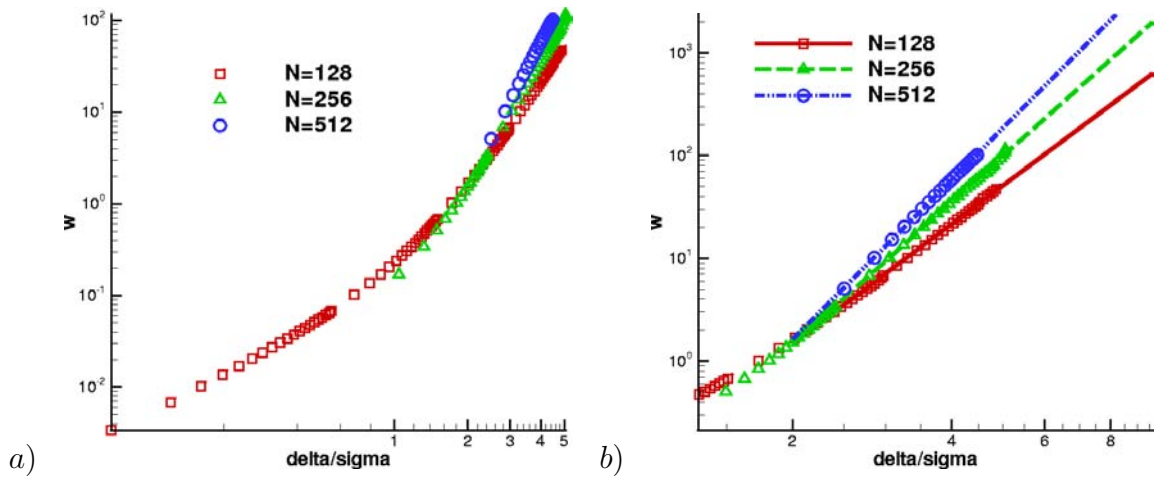


FIG. 4.3 – Evolution de la charge w en fonction du rapprochement des surfaces δ .

La figure 4.3 montre l'évolution de de la charge en fonction du déplacement des surfaces. Plus exactement, il s'agit du déplacement moyen des surfaces à charge imposée. Le rapprochement est adimensionnalisé par l'écart-type σ_{h_0} avant déformations. On constate deux régimes, selon la charge. On distingue le premier régime sur le graphe 4.3-a pour $N = 128$. On a alors une évolution en $w = 0.16 (\delta/\sigma_{h_0})^{1.50}$. On est alors dans le régime de Hertz pour les petits déplacements, pour lequel on

a $w \propto (\delta/\sigma_{h_0})^{3/2}$ [10]. L'évolution semble alors indépendante de la taille des pavés N : la courbe correspondant à $N = 256$ vient se superposer à celle en $N = 128$. La limite de ce régime se situe à $\delta/\sigma_{h_0} \approx 1$.

Le graphe 4.3-b représente l'évolution de w en fonction de δ/σ pour les grands déplacements. On a toujours une évolution en loi puissance de la charge en fonction du déplacement. En revanche, les coefficients de la loi puissance sont nettement plus grands, et évoluent en fonction de la taille. Les exposants obtenus sont donnés dans le tableau 4.1. Cette différence avec la théorie de Hertz est interprétée en termes d'effets coopératifs entre les aspérités. En effet, la théorie de Hertz est mise en place à partir d'une seule aspérité. Pour les tous petits déplacements, les aspérités n'ont pas d'influence sur leurs voisines. En revanche, pour des déplacements un peu plus grands, on ne peut plus négliger l'impact des autres aspérités.

N	128	256	512
exposant	3.85	4.60	5.16

TAB. 4.1 – Valeur des exposants de la régression en loi puissance de $w(\delta/\sigma_{h_0})$.

4.3 Résultats

4.3.1 Impact des déformations élastiques sur le seuil de percolation

Sur la figure 4.4, on a représenté la probabilité de percolation en fonction du taux de liens actifs $\frac{L}{L_{tot}}$. La figure 4.4-a montre l'évolution des probabilités de percolation, ainsi que les lois de régression dont l'expression est donnée par la relation (3.1), page 39. On obtient une bonne adéquation entre les deux courbes. Les valeurs des paramètres de la régression selon la loi erf sont donnés dans le tableau 4.2. On constate que les valeurs moyennes des seuils de percolation P_a sont très proches de celles obtenues dans le cas géométrique. Par contre, les valeurs des largeurs de transition sont plus faibles. L'observation de la figure 4.4-b confirme ces constatations : le décalage entre les courbes correspondant au cas élastique et à l'érosion géométrique (à même taille) se voit lorsqu'on s'éloigne du seuil moyen de percolation. En revanche, pour les valeurs de L/L_{tot} proches de P_a , elles sont presque confondues.

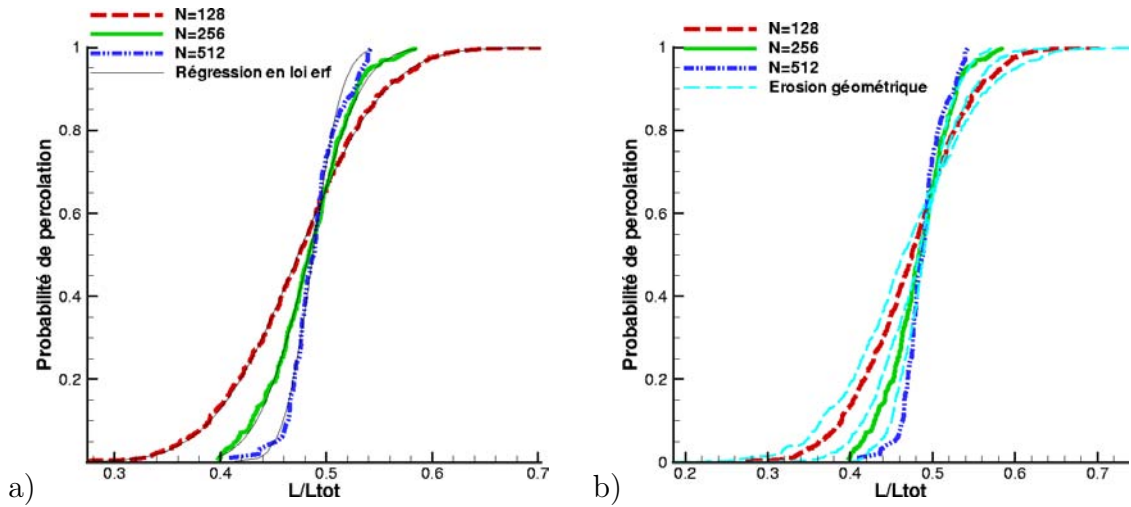


FIG. 4.4 – Probabilité de percolation. a) Comparaison avec une régression en loi erf. b) Comparaison des résultats en déformations élastiques et en érosion géométriques

N	P_a	Δ	N_r
64	45.85	9.92	400
128	47.35	6.50	600
256	48.34	3.87	255
512	48.73	2.19	98

TAB. 4.2 – Paramètres d’ajustement de la régression sur la probabilité de percolation

Concernant l’évolution de Δ , on obtient bien une évolution en loi puissance en fonction de N , comme on peut le constater sur la figure 4.5. Les régressions sont effectuées sur les résultats pour N variant de 128 à 512. On peut ainsi déterminer l’exposant de la percolation, qui vaut $\nu = 1.28 \pm 0.01$. On obtient donc un exposant inférieur à celui obtenu en érosion géométrique : $\nu = 1.57$.

4.3.2 Impact sur la conductance locale

La figure 4.6 montre l’évolution des distributions des conductances locales en déformations élastiques. Sur le graphe a), on a représenté l’évolution des distributions des conductances électriques en fonction de la charge imposée. La courbe en gris correspond à la distribution avant déformation. Lorsqu’on augmente progressivement la charge, la distribution est associée aux courbes suivant un dégradé du jaune

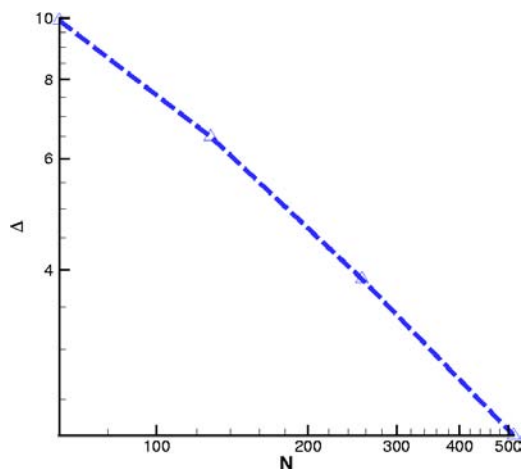
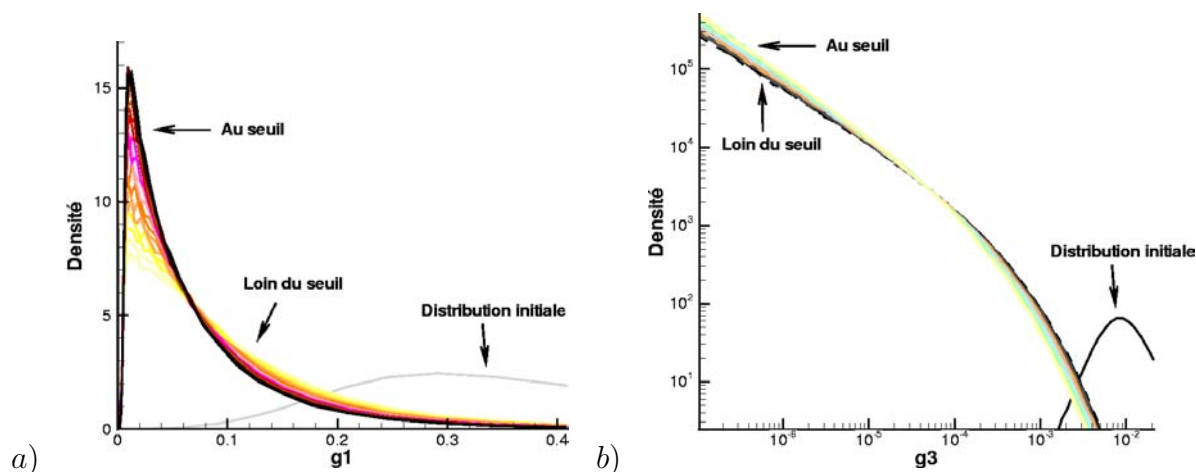
FIG. 4.5 – Evolution de Δ en fonction de N .

FIG. 4.6 – Distribution de la conductance locale en déformations élastiques. a) Conductance électrique. b) Conductance hydraulique.

au noir sur la figure 4.6. On constate le même type de distribution qu'en érosion géométrique. Sur le graphe 4.6-b, on a représenté l'évolution des distributions des conductances hydrauliques en fonction de la charge. On observe ici encore le même type de distribution que dans le cas de l'érosion géométrique, c'est-à-dire qu'on a des distributions en loi puissance pour les petites conductances. Toutefois, contrairement au cas de l'érosion géométrique, où l'exposant était constant et égal à $-2/3$, on constate que la présence de déformations élastiques modifie cet exposant qui varie en fonction de la charge appliquée de -1 à $-2/3$. Il faut noter qu'une telle variation de l'exposant apparent pourrait résulter d'un effet statistique lié à un nombre insuffisant

d'évènements par classe. Un tel effet est illustré sur la figure 4.7. On a représenté sur

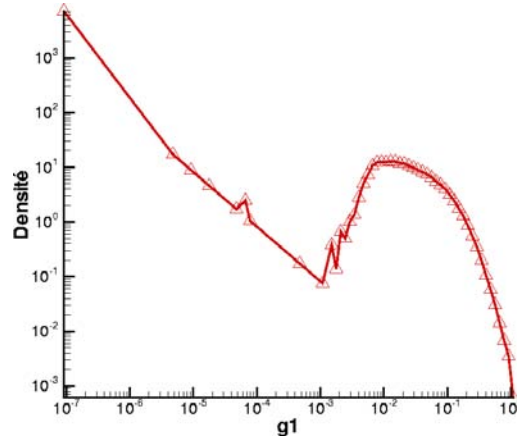


FIG. 4.7 – Effet statistique sur la conductance locale.

un graphe bi-logarithmique l'évolution de la distribution de la conductance locale électrique pour $N = 256$ avec $w_{ts} - w_t = 27.0$. Les moyennes ont été effectuées à partir de 200 réalisations. Une surface pour laquelle on impose une telle charge a environ 600 liens conducteurs. Les résultats sont donc établis à partir de 120000 événements. On peut donc en conclure que les points de la courbe correspondant à des valeurs de la conductance inférieure à 10^{-3} ne proviennent à chaque fois que d'un seul événement isolé. C'est pourquoi on obtient une évolution de la distribution de probabilité en loi puissance d'exposant -1 , qui provient du découpage logarithmique des classes. Nous avons vérifié que les variations de l'exposant apparent montré sur la figure 4.6-b ne sont pas liées à un tel effet de sous-échantillonnage.

4.3.3 Impact sur la conductance globale

La conductance électrique

La figure 4.8 montre l'évolution de la conductance moyenne électrique G_1 en déformations élastiques. Dans le cas a), on a regardé l'évolution en fonction de $w_{ts} - w_t$, c'est-à-dire en imposant un écart de charge par rapport à la charge au seuil de percolation w_{ts} . Contrairement à ce qu'on a pu observé dans le cas de l'érosion géométrique, on n'observe pas d'évolution en loi puissance. En revanche, si on s'éloigne un peu du seuil de percolation (pour $w_{ts} - wt > 20$), on observe une évolution de type loi puissance avec des exposants variant de 1.75 en $N = 128$ à 1.40

en $N = 512$. Par contre, lorsqu'on regarde l'évolution de G_1 , on constate que la valeur de la conductance ne tend pas vers 0 quand on se rapproche du seuil, ce qui pourtant paraîtrait normal. Cette observation laisserait penser que la détermination du seuil de percolation n'est pas effectuée avec suffisamment de précision. Des tests ont été effectués en faisant varier cette précision, mais les résultats sont restés identiques. En revanche, dans le cas où on observe l'évolution de G_1 en fonction de ϵ (graphe 4.8-b), une évolution en loi puissance se dégage. L'exposant de la conductance électrique calculé vaut $t = 0.86$ pour $N = 128$, $t = 0.73$ pour $N = 256$ et $t = 0.64$ pour $N = 512$. Ces valeurs sont relativement proches de celles obtenues en érosion géométrique : 0.71, 0.67 et 0.66.

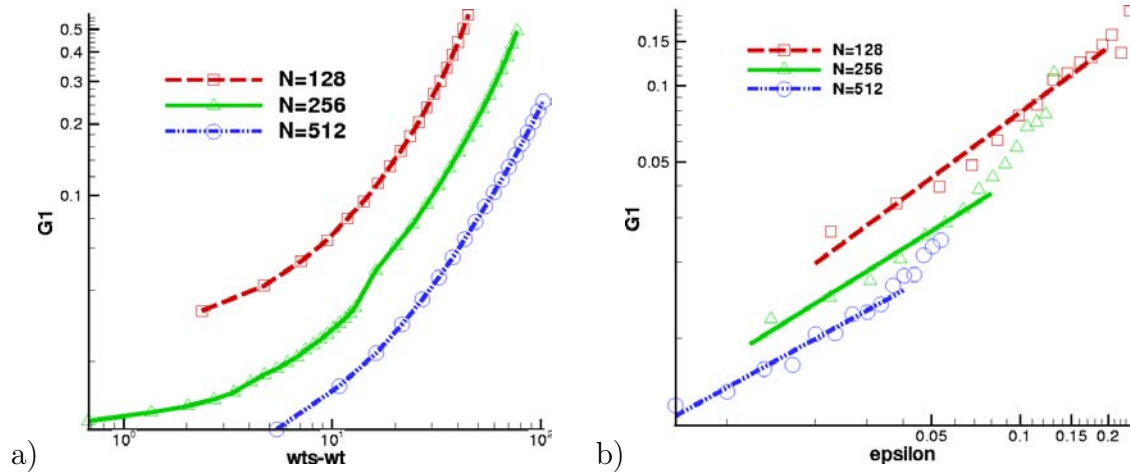


FIG. 4.8 – Conductance moyenne électrique en déformations élastiques. a) En fonction de la charge. b) En fonction de ϵ .

La conductance hydraulique

La figure 4.9 montre l'évolution de la conductance moyenne hydraulique G_3 en déformations élastiques. Dans le cas a), on a regardé l'évolution en fonction de $w_{ts} - w_t$, c'est-à-dire en imposant un écart de charge par rapport à la charge au seuil de percolation w_{ts} . Dans le cas b), on a regardé l'évolution de G_3 en fonction de la variation du taux de liens actifs ϵ . Concernant le graphe 4.9-a, on peut faire les mêmes observations que pour la conductance électrique, notamment que la valeur de G_3 ne tend pas franchement vers 0 quand on se rapproche du seuil de percolation. En revanche, les résultats du graphe 4.9-b montrent une évolution de la conductance

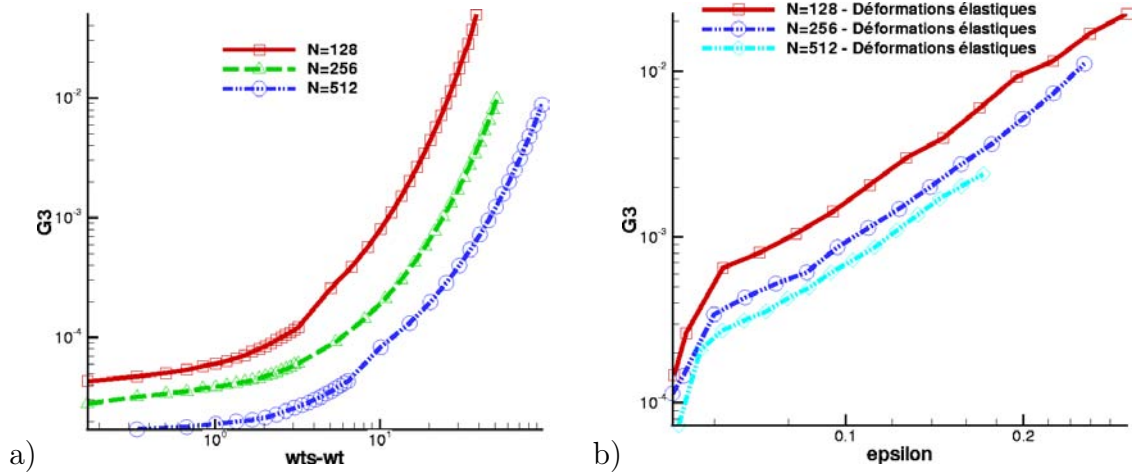


FIG. 4.9 – Conductance moyenne hydraulique en déformations élastiques. a) En fonction de la charge. b) En fonction de ϵ .

hydraulique en loi puissance sur une plus large gamme de valeurs et de manière plus nette que pour la conductance électrique, pour $\epsilon \in [0.06, 0.18]$.

Sur le graphe 4.10, on compare pour $N = 256$ l'évolution obtenue avec l'hypothèse d'érosion géométrique et celle en tenant compte des déformations élastiques. On constate que l'écrêtage géométrique conduit généralement à une conductance supérieure à celle calculée en tenant compte des déformations élastiques. La conductance hydraulique semble évoluer selon une loi puissance.

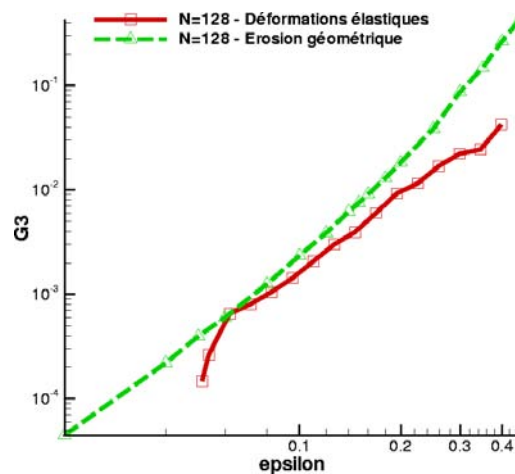


FIG. 4.10 – Comparaison de l'évolution de la conductance hydraulique entre des déformations élastiques et de l'érosion géométrique.

Les régressions en loi puissance sur $\epsilon \in [0.06, 0.18]$ donnent les résultats suivants :

$$N = 128 \quad : \quad G_3 = 0.306 \epsilon^{2.25}$$

$$N = 256 \quad : \quad G_3 = 0.180 \epsilon^{2.27}$$

$$N = 512 \quad : \quad G_3 = 0.116 \epsilon^{2.21}$$

En érosion géométrique, on avait constaté les relations suivantes :

$$N = 128 \quad : \quad G_3 = 1.266 \epsilon^{2.71}$$

$$N = 256 \quad : \quad G_3 = 0.597 \epsilon^{2.74}$$

$$N = 512 \quad : \quad G_3 = 0.450 \epsilon^{2.80}$$

Seulement, les régressions ont été effectuées pour $\epsilon \in [0.02; 0.18]$, donc des valeurs plus petites. Or, on a souligné précédemment (voir chapitre 3) que la valeur de l'exposant de la conductance t était fortement dépendant (tout du moins pour une précision à 0.01) de la plage de valeurs de ϵ sur laquelle on fait la régression. Or, en déformations élastiques, les résultats en fonction de ϵ sont difficiles à obtenir, et d'autant plus qu'on se rapproche du seuil de percolation. En effet, en déformations élastiques, ϵ n'est pas un paramètre de contrôle. On impose seulement $w_{ts} - w_t$. Pour avoir des résultats en fonction de ϵ , on établit des classes et on fait des moyennes sur ces classes, ce qui est source d'imprécisions, surtout quand on manque de statistiques. Sur la figure 4.10, on constate que pour $\epsilon < 0.06$, la conductance diminue très nettement, et de façon irrégulière par rapport au comportement observé pour $\epsilon > 0.06$. Ce phénomène est attribué au manque de statistiques et au manque de précisions dans la détermination du seuil. Il faudrait cependant le confirmer (en effectuant plus de calculs près du seuil de percolation) afin de vérifier que ce n'est pas dû à un comportement atypique du système.

Afin de comparer les résultats en érosion géométrique et en déformations élastiques, nous avons fait une régression du type $\overline{G_3} = G_0(N) \epsilon^t$ en déformations élastiques. Nous avons obtenu $\overline{G_3} = 1.69 N^{-0.63} \epsilon^{2.2}$. Pour rappel, on avait obtenu $\overline{G_3} = 25.3 N^{-0.66} \epsilon^{2.8}$ en érosion géométrique. On a donc des comportements relativement proches pour les deux types de déformations.

4.3.4 Conclusion

Des premiers résultats sur l'influence de déformations élastiques ont été présentés dans ce chapitre. Ainsi, nos calculs mettent en évidence une relation non triviale

entre charge et déplacement lorsque celui-ci n'est plus très petit. Ainsi, pour des déplacements tels que $\delta > \sigma$, on trouve des exposants plus grands d'un facteur 3 environ par rapport au régime où la loi de Hertz s'applique. Ceci a été interprété comme une conséquence d'effets de déformations coopératives entre aspérités.

L'évolution de la conductance en présence de déformations élastiques se démarque sensiblement du comportement en loi puissance déjà observé pour l'écrêtage géométrique. Si on observe l'évolution de la conductance en fonction de $w_{ts} - w_t$, on constate deux régimes : un très près du seuil, avec une faible variation de la conductance, et un un peu plus éloigné, où la conductance évolue plus significativement. Dans cette zone, l'évolution de la conductance, électrique ou hydraulique, semble suivre une loi puissance. Mais ces résultats méritent d'être approfondis pour permettre une analyse plus précise des comportements constatés, et notamment comprendre pourquoi la conductance semble tendre vers une valeur limite quand on se rapproche du seuil de percolation.

En revanche, si on regarde le comportement en fonction de ϵ , on observe des évolutions en loi puissance. En plus, les exposants constatés en déformations élastiques sont proches de ceux obtenus en érosion géométrique. Ainsi, il semblerait que le mode de déformations élastiques n'entraîne pas de modifications sur la structure du réseau.

Chapitre 5

Approximation des milieux effectifs

L'approximation des milieux effectifs (Effective Medium Approximation (EMA) en anglais) est une méthode de champ moyen permettant de calculer la conductance globale d'un réseau de résistances à partir de la distribution des résistances locales. Comme toute approximation de champ moyen, elle n'est adaptée que suffisamment loin du seuil de percolation. Cette approximation suppose que chaque lien voit l'ensemble du réseau auquel il est connecté comme un seul lien équivalent. Ce type d'approximation très général en physique se décline dans le contexte de l'étanchéité sous la forme d'une conductance (électrique ou hydraulique) équivalente [12]. On trouvera dans [36] une bonne vue d'ensemble sur le sujet. Dans l'ensemble, les différentes études montrent que le calcul d'une conductance équivalente par EMA permet une bonne approximation de la conductance dès qu'on est suffisamment éloigné du seuil de percolation et que près du seuil de percolation, cette méthode conduit à une sous-estimation de la conductance [12].

5.1 Principe de l'EMA

5.1.1 Cas général

Le principe est de calculer la conductance moyenne d'un milieu à partir de la distribution des conductances locales des liens du milieu. Pour établir la relation entre la distribution des conductances locales et la conductance moyenne, on s'appuie sur l'analogie avec le problème électrique [1].

Considérons un réseau carré dont les conductances locales sont distribuées aléa-

toirement selon la densité de probabilité $f(g)$. La conductance moyenne vaut :

$$G = \int g f(g) dg$$

Supposons alors que toutes les conductances locales valent G . Au niveau de chaque lien, on a une différence de potentiel V . On vient maintenant modifier la conductance du lien AB, pour lequel la conductance vaut G_0 , comme illustré sur la figure 5.1. Entre chaque ligne du réseau, on veut maintenir la même différence de potentiel V .

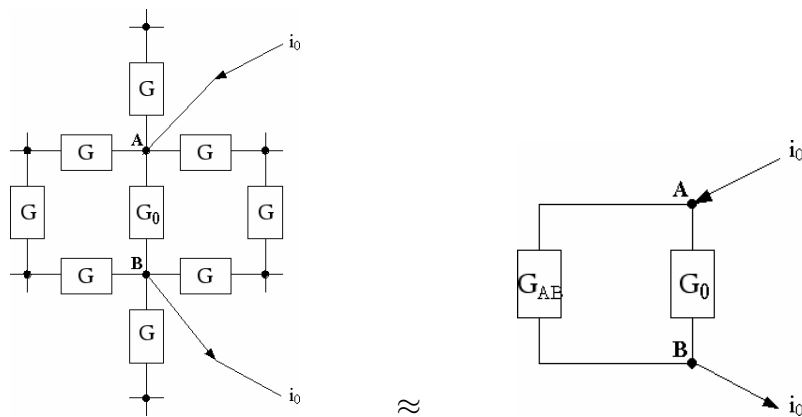


FIG. 5.1 – Illustration de la théorie des milieux effectifs

On va donc ajouter un courant i_0 tel que :

$$i_0 = V(G - G_0)$$

Pour évaluer la variation de potentiel correspondant à ce courant, on doit déterminer la conductance équivalente entre A et B . On peut associer à celle-ci la mise en parallèle de deux conductances : G_{AB} et G_0 comme montré sur la figure 5.1, où G_{AB} correspond au reste du réseau. Pour obtenir sa valeur, il faut considérer la superposition de deux situations : l'une où le courant i_0 entre dans le système en A et part à l'infini, et l'autre où le courant vient de l'infini, et sort en B . Si tous les liens ont une conductance de G , on obtient, pour des raisons de symétrie, que le courant entre A et B vaut i_0/z , où z est la coordinance du milieu (dans l'exemple présenté, z vaut 4). Si on considère la superposition des deux situations, on a donc un courant de $2(i_0/z)$ entre A et B et le courant dans le reste du réseau vaut $i_0(1 - 2/z)$. Pour qu'il y ait un équilibre au niveau des tensions, on doit donc avoir :

$$\frac{1}{G_{AB}} i_0 \left(1 - \frac{2}{z}\right) = \frac{1}{G} \frac{2i_0}{z}$$

ce qui nous donne la relation :

$$G_{AB} = G \left(\frac{z}{2} - 1 \right) \quad (5.1)$$

On revient maintenant au problème initial. La conductance totale entre A et B est donc la somme de G_{AB} et de G_0 . La variation de potentiel due au courant i_0 est donc :

$$\delta V_0 = \frac{i_0}{G_{AB} + G_0} \quad (5.2)$$

Cette relation est valable quelle que soit la conductance G_0 . La moyenne des variations de potentiel doit être nulle sur l'ensemble du réseau, obéissant à une densité de probabilité $f(g)$. Avec les deux relations (5.1) et (5.2), on obtient donc :

$$\int \frac{g - G}{g + \left(\frac{z}{2} - 1 \right) G} f(g) dg = 0 \quad (5.3)$$

Résoudre cette équation permet d'obtenir la valeur de la conductance équivalente G du réseau, selon l'approximation des milieux effectifs.

5.1.2 Cas d'une distribution binaire g_a/g_b

Dans ce cas, on a une proportion P de liens qui ont une conductance g_a , et une proportion $1 - P$ de liens qui ont une conductance g_b . L'équation (5.3) nous donne la relation :

$$P \frac{g_a - G}{g_a - \left(\frac{z}{2} - 1 \right) G} + (1 - P) \frac{g_b - G}{g_b - \left(\frac{z}{2} - 1 \right) G} = 0$$

Dans le cas où g_b est nulle, on obtient la relation :

$$G = g_a \frac{P - \frac{2}{z}}{1 - \frac{2}{z}} \quad (5.4)$$

Les résultats obtenus par [12] sur des réseaux carrés ou cubiques montrent une bonne adéquation entre l'approximation des milieux effectifs et des calculs sur réseaux aléatoires, tant qu'on ne se situe pas trop près du seuil de percolation.

5.2 Application de l'EMA au calcul de la conductance équivalente d'un joint

Dans un premier temps, nous avons résolu numériquement l'équation (5.3) à partir des distributions statistiques des conductances locales brutes, c'est-à-dire des

histogrammes numériques. Dans un second temps, nous avons résolu numériquement l'équation (5.3) en utilisant une expression analytique approchée de la densité de probabilité des conductances locales.

5.2.1 A partir des histogrammes des distributions statistiques

Pour calculer numériquement l'intégrale de l'équation à résoudre, plusieurs méthodes ont été testées : méthode des trapèzes, Simpson, rectangle. Il n'y a eu aucun impact sur les résultats. Donc la méthode la plus simple a été retenue. En revanche, le découpage de la zone à intégrer est très important. Les résultats sont très variables si on utilise un découpage linéaire ou logarithmique. On est obligé d'utiliser un découpage logarithmique de l'intervalle à intégrer, dans la mesure où on a des distributions obéissant à des lois log-normale.

En fait, ceci est pris en compte lors de l'établissement des distributions. Supposons que pour une distribution f , on ait une conductance minimale de g_{min} et une conductance maximale de g_{max} . On découpe l'intervalle $(\ln(g_{max}) - \ln(g_{min}))$ en 100 cellules, ce qui donne un pas log de $p = \frac{1}{100} \ln\left(\frac{g_{max}}{g_{min}}\right)$. Le centre des cellules se situe donc en $\exp\left[\ln(g_{min}) + pas\left(i - \frac{1}{2}\right)\right]$, avec i variant de 1 à 100. La largeur des cellules vaut donc $d(i) = [g_{min} (\exp(pas\ i) - \exp(pas\ (i - 1)))]$. Avec ces données, on peut calculer les intégrales se référant aux distributions.

Pour résoudre l'équation 5.3, on cherche à minimiser la somme suivante :

$$\frac{L}{L_{tot}} \sum_{i=1}^{100} f(i) d(i) \frac{G_3 - \ln(g(i))}{\ln(g(i)) + \left(\frac{z}{2} - 1\right) G_3} - \frac{L_{tot} - L}{L_{tot}} \frac{1}{\left(\frac{z}{2} - 1\right)} = S \quad (5.5)$$

en faisant varier G_3 . Contrairement à ce qui se fait habituellement, on ne met pas un critère d'arrêt sur la somme S , mais on fait un nombre de cycles important afin de converger.

Les valeurs des coordinances sont données dans le tableau 5.1. On constate que la valeur de la coordinance moyenne tend vers $z = 4.0$, qui est la valeur correspondant à un réseau régulier carré.

N	128	256	512	1024	2048
z	3.33	3.63	3.80	3.89	3.93

TAB. 5.1 – Valeur de la coordinance moyenne pour le réseau aléatoire

Conductance électrique La figure 5.2-a représente l'évolution de G_1 calculée par EMA à partir de la distribution des conductances locales présentées dans la partie 3.2.2. Le comportement est très proche pour les deux tailles. La figure 5.2-b

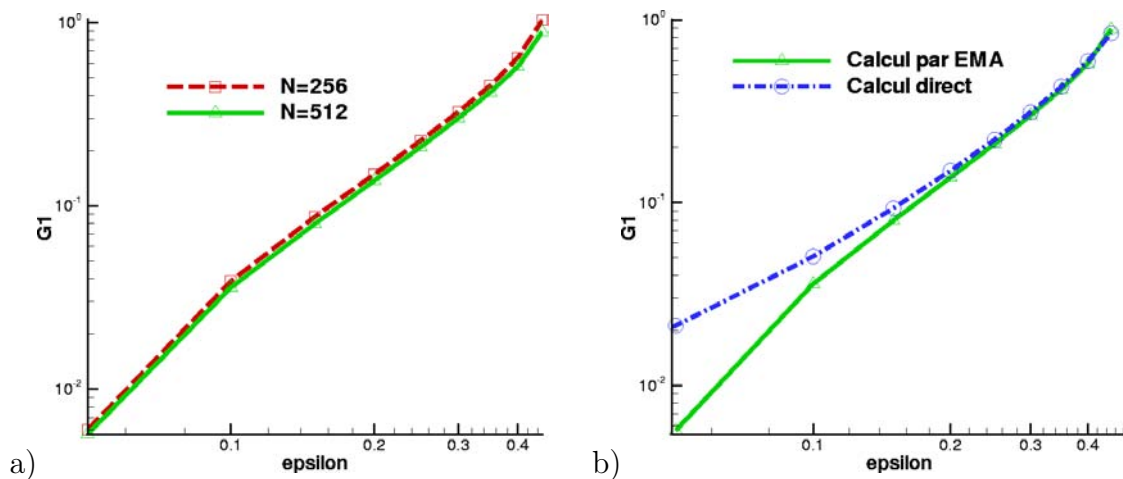


FIG. 5.2 – Evolution de la conductance moyenne électrique calculée par EMA. a) Evolution selon N . b) Comparaison avec le calcul direct pour $N = 512$.

représente, pour $N = 512$, une comparaison entre le calcul de G_1 par EMA, et la moyenne de G_1 issue du calcul direct. On obtient une bonne adéquation entre les résultats lorsqu'on s'éloigne suffisamment du seuil de percolation. Le calcul par EMA constitue donc une bonne approximation pour le calcul de la conductance électrique. Le résultat issu du calcul par EMA a juste tendance à légèrement sous-estimer la conductance.

Conductance hydraulique La figure 5.3-a représente l'évolution de G_3 calculée par EMA à partir de la distribution des conductances locales présentées dans la partie 3.2.3. La figure 5.3-b représente, pour $N = 512$, une comparaison entre le calcul de G_3 par EMA, et la moyenne de G_3 issue du calcul direct. De même que dans le cas électrique, le comportement en fonction de la taille est très proche pour les trois tailles et le calcul par EMA constitue une bonne approximation de la conductance hydraulique, pour autant qu'on soit assez éloigné du seuil de percolation.

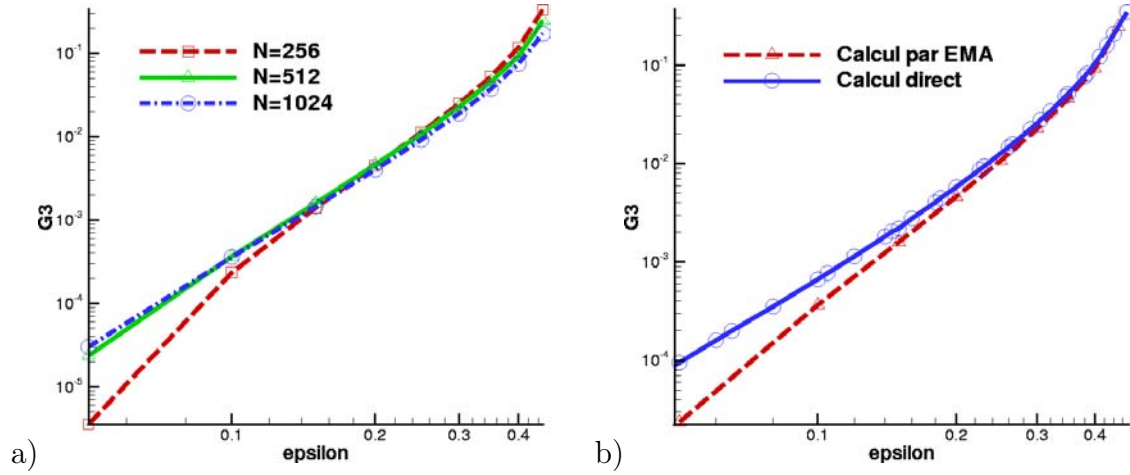


FIG. 5.3 – Evolution de la conductance moyenne hydraulique calculée par EMA. a) Evolution selon N . b) Comparaison avec le calcul direct pour $N = 512$.

5.2.2 A partir d'une approximation analytique de la densité de probabilité des conductances locales

Le travail décrit ici n'a été fait que dans le cas de la conductance hydraulique.

En faisant des essais sur les distributions, en tronquant certaines parties pour voir quel était l'impact de telle ou telle zone sur le calcul de la conductance équivalente, on s'est aperçu que ce sont principalement les petites conductances qui ont un impact sur le résultat. On a donc cherché à décrire la distribution aux petites valeurs des conductances locales. Sur la figure 5.4, on a superposé les distributions de la conductance hydraulique en fonction de ϵ , telles que montrées dans la section 3.2.3, ainsi que les régressions pour les petites conductances. Dans ce cas, on a $f(g_3) \propto (c_0 + c_1 \epsilon) g_3^{-2/3}$. Les valeurs des coefficients c_i sont données dans le tableau 3.4, page 50. Les bornes supérieures des conductances sont déterminées de façon à ce que l'intégrale de chaque distribution vaille 1. On utilise ces distributions pour calculer G_3 . On obtient les résultats présentés sur la figure 5.5. L'évolution globale est similaire à celle précédemment obtenue à partir des histogrammes des conductances locales. On constate une bonne adéquation avec les résultats précédents, que ce soit la conductance équivalente obtenue à partir des histogrammes ou le calcul direct. On va donc utiliser l'approximation de la distribution en $f(g_3) = (c_0 + c_1 \epsilon) g_3^{-2/3}$ pour construire une expression analytique de la conductance calculée par EMA.

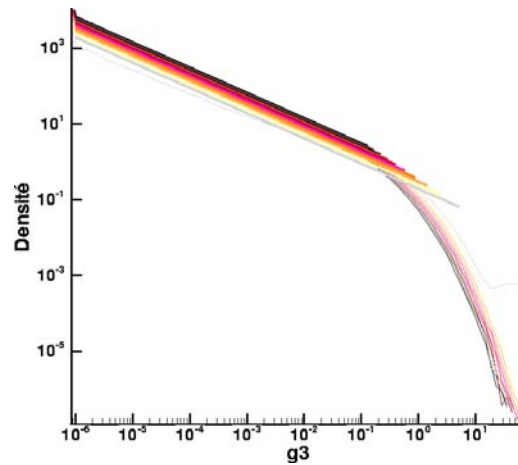


FIG. 5.4 – Régression en loi puissance pour les petites conductances de la distribution hydraulique, avec $N = 512$.

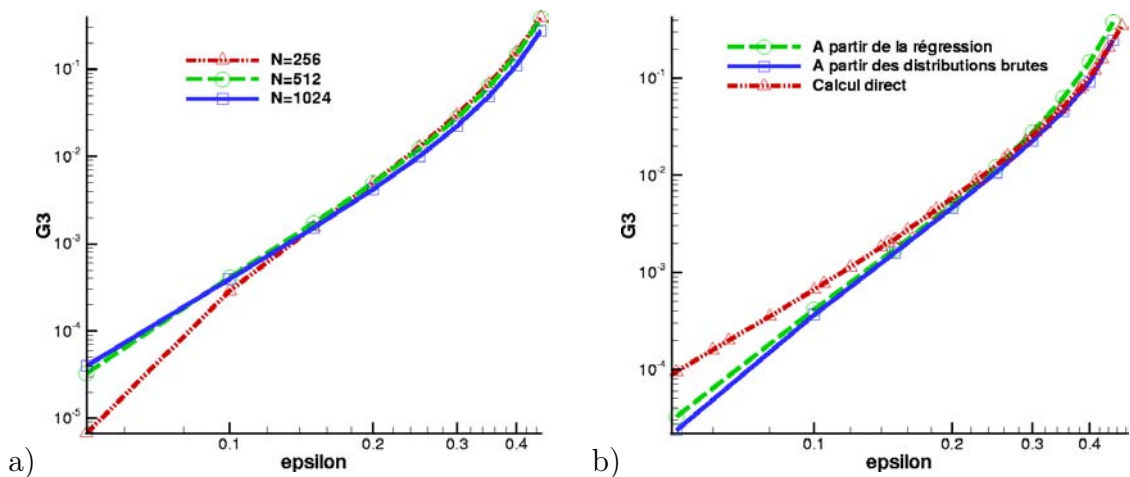


FIG. 5.5 – Conductance hydraulique calculée par EMA à partir des régressions aux petites conductances. a) Pour différentes tailles de système. b) Comparaison avec les résultats précédents.

5.3 Approximation analytique

L'approximation analytique a été développée seulement dans le cas hydraulique. En effet, dans le cas électrique, il n'a pas été possible de déduire une expression analytique explicite pour la conductance équivalente.

5.3.1 Les données

On part donc de l'équation suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{g_3 - G_3}{g_3 + (\frac{z}{2} - 1) \cdot G_3} f_e(g_3) dg_3 = 0$$

où G_3 est l'inconnue, et f_e la densité de probabilité de toutes les conductances locales du milieu, y compris les conductances nulles. En séparant la contribution des liens conducteurs et celle des liens non conducteurs (dans ce cas $g_3 = 0$), on aboutit à :

$$\frac{L}{L_{tot}} \int_0^{+\infty} \frac{g_3 - G_3}{g_3 + (\frac{z}{2} - 1) G_3} f(g_3) dg_3 + \frac{L_{tot} - L}{L_{tot}} \frac{-1}{\frac{z}{2} - 1} = 0 \quad (5.6)$$

où f est la densité de probabilité des conductances locales des liens conducteurs. Pour simplifier l'expression, on introduit la coordinance réduite Z :

$$Z = \frac{z}{2} - 1$$

De plus, on pose :

$$f(g_3) = C g_3^{-2/3} \text{ sur } [0; \frac{1}{(3C)^3}] \text{ et } 0 \text{ partout ailleurs}$$

avec :

$$C = c_0 + c_1 \epsilon$$

Les valeurs des coefficients c_i sont définies dans le tableau 3.4, page 50.

5.3.2 Mise en place du problème

On pose :

$$\tilde{f} = \int_0^{\frac{1}{(3C)^3}} g_3^{-2/3} \frac{g_3 - G_3}{g_3 + Z G_3} dg_3$$

En intégrant cette expression, et en posant $B = \frac{1}{3C}$ et $X = \frac{B}{(Z G_3)^{1/3}}$, on obtient :

$$\tilde{f} = 3B + \frac{B(1+Z)}{XZ} \left[\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{3X}{1+X^2} \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} (2X - 1) \right) - \frac{\pi \sqrt{3}}{6} \right]$$

On obtient alors la relation suivante sur \tilde{f} :

$$\frac{XZ(\tilde{f} - 3B)}{B(1+Z)} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{3X}{1+X^2} \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} (2X - 1) \right) - \frac{\pi \sqrt{3}}{6}$$

Avec l'utilisation des variables \tilde{f} et B , l'équation (5.6) devient :

$$\frac{L}{L_{tot} - L} C \tilde{f} - \frac{1}{Z} = 0$$

ce qui s'écrit aussi

$$\tilde{f} = \frac{L_{tot} - L}{L} \cdot \frac{3B}{Z}$$

On introduit alors la variable ϵ , qui représente l'écart au seuil de percolation : $\epsilon = \frac{L-L_c}{L_{tot}}$, les valeurs de $\frac{L_c}{L_{tot}}$ étant données dans le tableau 3.1, ce qui donne :

$$\tilde{f} = r \cdot \frac{3B}{Z}$$

avec

$$r = \frac{L_{tot} - L}{L} = \frac{1}{1 - \frac{L_c}{L_{tot}} + \epsilon} - 1$$

Tout ceci nous donne l'équation en X du problème :

$$\frac{3X(r - Z)}{1 + Z} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{3X}{(1+X)^2} \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2X - 1) \right) - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \quad (5.7)$$

5.3.3 Développement limité

Afin de résoudre l'équation (5.7), on fait un développement du membre de droite de cette équation. Dans la zone qui nous intéresse, X varie entre 2 et 10. On utilise un développement limité pour X grand. L'approximation au premier ordre ne donne pas des résultats satisfaisant. En revanche, au 2ème ordre du développement limité, on obtient un très bon accord entre les deux fonctions \ln et \arctan et leur développement, comme on peut le constater sur la figure 5.6. Sur cette figure, on a représenté, en fonction de X , le rapport entre la valeur du développement limité au 2ème ordre et la fonction, en a) pour la fonction \arctan , en b), pour la fonction logarithmique. En utilisant cette approximation, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2X - 1) \right) &= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2X} - \frac{\sqrt{3}}{4X^2} + O\left(\frac{1}{X^4}\right) \\ \ln \left(1 - \frac{3X}{(1+X)^2} \right) &= -\frac{3}{X} + \frac{3}{2X^2} + O\left(\frac{1}{X^4}\right) \end{aligned}$$

qui conduit à :

$$\frac{3X(r - Z)}{1 + Z} = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{X} + \frac{3}{2X^2} \right) - \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2X} - \frac{\sqrt{3}}{4X^2} \right) - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + O\left(\frac{1}{X^4}\right)$$

de sorte qu'en négligeant les termes d'ordre $O(\frac{1}{X^2})$, on obtient une équation cubique :

On constate qu'on a 3 racines réelles à chaque fois : une négative et deux positives.

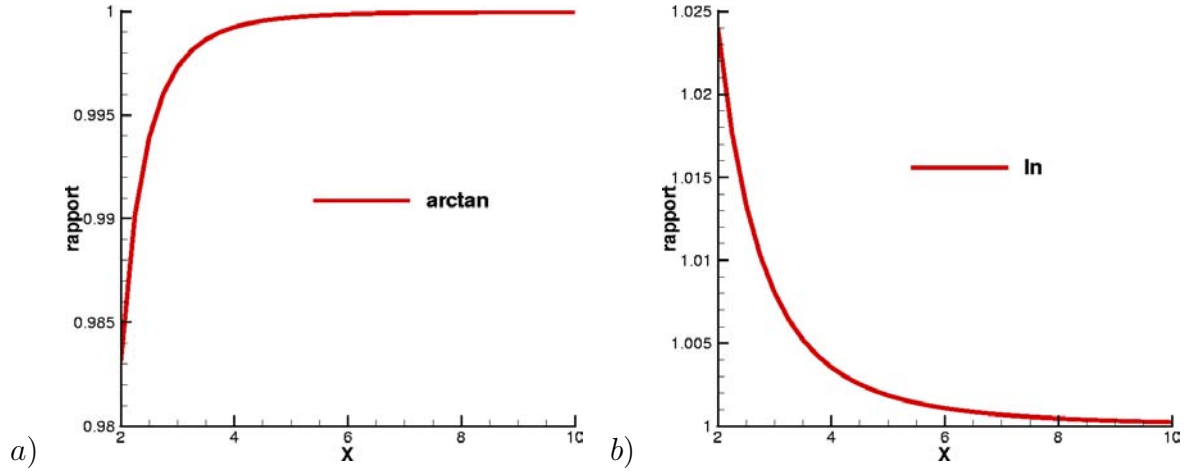


FIG. 5.6 – Evolution du rapport entre le développement limité au 2ème ordre et la fonction correspondante. a) Pour la fonction arctan. b) Pour la fonction ln.

Ceci reste vrai quel que soit ϵ , dans la plage de valeurs qui nous concerne. La racine qui nous intéresse est celle dont la valeur est la plus élevée. Cette solution n'est pas continue sur tout le domaine balayé par ϵ . On a une discontinuité pour ϵ petit (lorsqu'on a $r = Z$). Toutefois, cette limite n'est pas restrictive dans la mesure où l'approximation que l'on cherche à expliciter ici n'est plus valide lorsque ϵ tend vers 0 (près du seuil de percolation).

$$X^3 \cdot \frac{3(r-Z)}{1+Z} + X^2 \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} = 0 \quad (5.8)$$

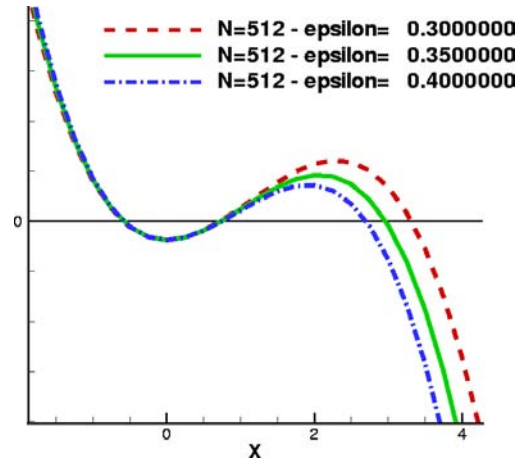
Sur la figure 5.7, on a représenté l'évolution du polynôme en X de l'équation 5.8 pour ϵ variant de 0.30 à 0.40..

La solution de la cubique (5.8) écrite sous la forme $a \cdot X^3 + b \cdot X^2 + c$ (pour $a, b, c \in \mathbb{R}$) s'obtient explicitement :

$$x = \frac{\left(-108ca^2 - 8b^3 + 12\sqrt{3}a\sqrt{c(27ca^2 + 4b^3)}\right)^{1/3}}{-12a} - \frac{b^2}{3a\left(-108ca^2 - 8b^3 + 12\sqrt{3}a\sqrt{c(27ca^2 + 4b^3)}\right)^{1/3}} - \frac{b}{3a} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \left[\frac{\left(-108ca^2 - 8b^3 + 12\sqrt{3}a\sqrt{c(27ca^2 + 4b^3)}\right)^{1/3}}{6a} + \frac{2b^2}{3a\left(-108ca^2 - 8b^3 + 12\sqrt{3}a\sqrt{c(27ca^2 + 4b^3)}\right)^{1/3}} \right]$$

où i est le symbole des nombres imaginaires. Afin d'exprimer cette solution, on pose :

$$8b^3 e^{i\theta} = -108ca^2 - 8b^3 + 12\sqrt{3}ai\sqrt{-c(27ca^2 + 4b^3)}$$

FIG. 5.7 – Allure générale des polynomes cubiques en X issus de l'équation (5.8).

où

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= -\frac{27ca^2}{2b^3} - 1 \\ \sin(\theta) &= \frac{12\sqrt{3}a\sqrt{-c(27ca^2+4b^3)}}{8b^3}\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$x = -\frac{b}{3a} \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + 1 + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right)$$

Comme $G_3 = \frac{B^3}{ZX^3}$, on obtient finalement l'expression suivante :

$$G_3 = -\frac{81\sqrt{3}(r-Z)^3}{C^3 8 Z \pi^3 (1+Z)^3 \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + 1 + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right)^3}$$

ce qui équivaut à :

$$G_3 = -\frac{81\sqrt{3} \left(\frac{1}{1-\frac{Lc}{L_{tot}}+\epsilon} - \frac{z}{2} \right)^3}{\pi^3 z^3 \left(\frac{z}{2} - 1 \right) C^3 \left(1 + \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right)^3} \quad (5.9)$$

avec

$$\theta = \arccos \left(\frac{2187\sqrt{3} \left(\frac{1}{1-\frac{Lc}{L_{tot}}+\epsilon} - \frac{z}{2} \right)^2}{8z^2\pi^3} - 1 \right)$$

La figure 5.8 représente l'évolution de G_3 en fonction de ϵ . Sur le graphe 5.8-a, on a représenté les résultats issus de la relation (5.9) pour $N = 512$ et les résultats présentés dans la section 5.2.2. On constate que le calcul analytique conduit à une légère sous-estimation de la conductance hydraulique G_3 , et que l'approximation

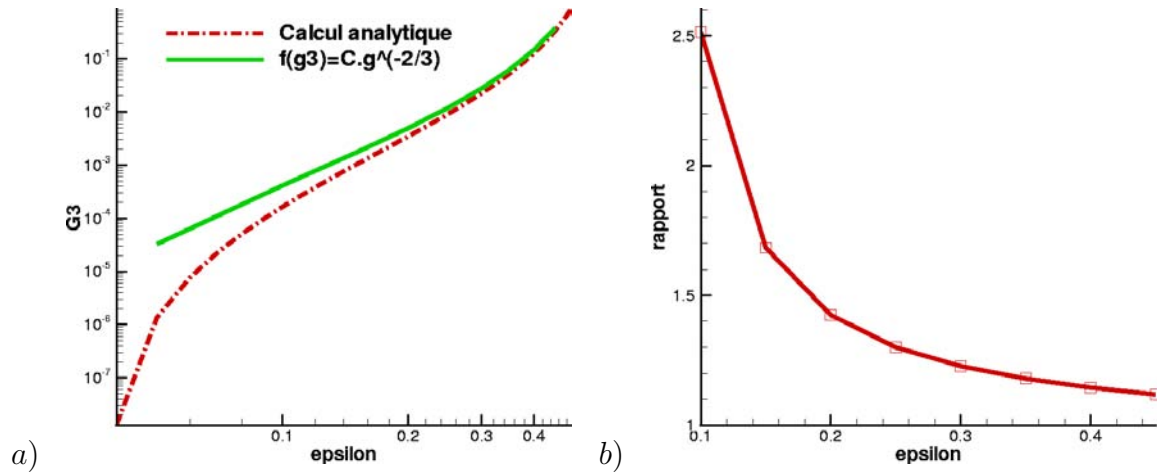


FIG. 5.8 – Evolution de G_3 en fonction de ϵ pour $N = 512$. a) Comparaison entre le calcul analytique et le calcul issu de la distribution en $C g^{-2/3}$. b) Rapport des résultats issus des deux méthodes.

est d'autant meilleure qu'on s'éloigne du seuil. On le mesure très bien à partir des résultats présentés sur le graphe 5.8-b représentant le rapport des résultats issus des deux méthodes. De même, l'approximation est encore meilleure lorsqu'on augmente la taille du système N . Les valeurs obtenues sont comparables à celles obtenues en résolvant numériquement la relation de l'EMA.

5.3.4 Résultats

Sur la figure 5.9, on a représenté l'évolution de la conductance hydraulique calculée à partir de l'expression (5.9), pour des tailles allant de $N = 128$ à $N = 2048$. On observe une évolution proche d'une loi puissance pour $\epsilon < 0.35$, qui s'en écarte ensuite. On constate une faible dépendance à la taille du système, et des courbes qui ont tendance à se croiser, contrairement aux résultats obtenus directement à partir du code. La figure 5.10 représente l'évolution de la conductance hydraulique G_3 en fonction de ϵ , comparée aux résultats du calcul direct. Sur le graphe 5.10-a, on a l'évolution de G_3 pour $N = 512$. La courbe en pointillé correspond au calcul direct, l'autre à l'expression analytique. On observe effectivement un écart relativement faible entre le calcul direct et l'approximation des milieux effectifs, surtout dans la zone où ϵ varie entre 0.2 et 0.4. Au delà de 0.4, cet écart devient plus important.

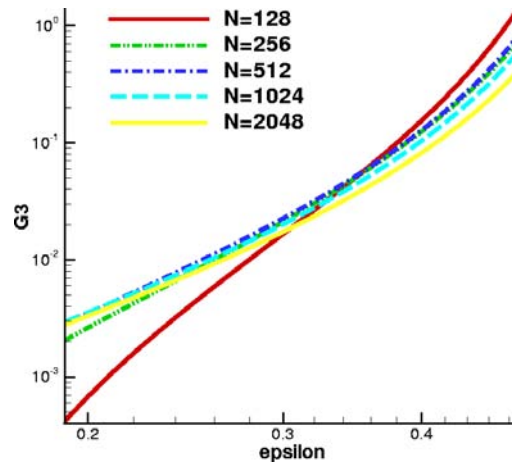


FIG. 5.9 – Représentation bilogarithmique de l'évolution de la conductance hydraulique en fonction de ϵ .

L'accroissement de l'erreur constatée est à imputer principalement à l'imprécision du calcul direct. En effet, pour certain système, il est difficile d'atteindre des situations où $\epsilon > 0.4$. En effet, si on revient à la définition de ϵ , on a : $\epsilon = \frac{L-L_c}{L_{tot}}$. La valeur maximale de ϵ est donc $1 - \frac{L_c}{L_{tot}}$. Donc, même si la probabilité est très faible, il est possible que pour certaines réalisations, on arrive à saturation de ϵ . Il en résulte que ces valeurs extrêmes de ϵ sont rarement atteintes lors des calculs directs. Ainsi, la qualité des moyennes statistiques associées à ces valeurs extrêmes de ϵ est évidemment beaucoup moins bonne. Sur le graphe 5.10-b, on a représenté le rapport de G_3 calculé par les deux méthodes. Une des courbes correspond à $N = 512$, l'autre à $N = 1024$. Le rapport entre la conductance calculée par la méthode réseau et la méthode analytique varie autour de 1 et l'erreur dépend de ϵ . Ce dernier point est peut-être à imputer au fait qu'on part d'une distribution des conductances locales qui marche très bien pour ϵ petit, et que la méthode des champs moyens fonctionne surtout lorsqu'on s'éloigne du seuil de percolation, donc pour ϵ suffisamment grand. Il paraît en tout cas facile de corriger l'expression analytique (5.9) afin d'obtenir des résultats très proches de ceux donnés par le calcul direct.

Il faut souligner que les résultats sont particulièrement dépendant de la régression effectuée sur les conductances, le coefficient multiplicateur C . Or, lorsqu'on fait des régressions telles que celles-ci, il faut faire des choix, le plus important étant de savoir sur quelles plages de valeur se placer pour faire la régression. Selon ces choix

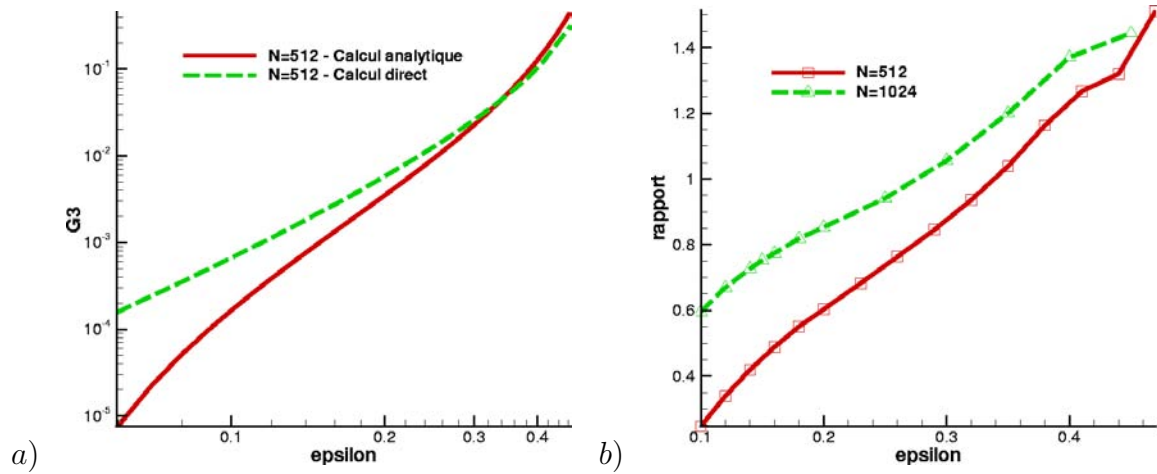


FIG. 5.10 – a) Représentation bilogarithmique de l'évolution de la conductance G_3 en fonction de ϵ , pour le calcul direct et par la relation (5.9). b) Rapport des valeurs de G_3 obtenues par calcul direct et par la relation (5.9).

(plusieurs essais ont été faits), les résultats obtenus sur la conductance équivalente sont plus ou moins précis par rapport au calcul direct. Dans la présentation faite ici, pour faire la régression, on a choisi, pour chaque distribution, de faire une moyenne de $f(g_3) g_3^{2/3}$, ce qui donne les préfacteurs C . On fait ensuite une régression linéaire sur ces préfacteurs, pour $\epsilon \in [0, 0.30]$. C'est en effet la plage sur laquelle la régression linéaire est la plus adaptée. On obtient donc les coefficients c_i pour chaque taille du système. Cependant, ce n'est pas la méthode qui donne les meilleurs résultats pour le calcul de la conductance équivalente. On aurait aussi pu choisir de faire une régression sur C en prenant en compte toutes les valeurs de ϵ . La figure 5.11 montre l'impact sur la conductance équivalente G_3 de la régression sur C . Pour $N = 512$, on avait donné $C = 0.66 - 1.04 \epsilon$. En faisant une régression sur toute la gamme de valeur de ϵ , on obtient alors $C = 0.68 - 1.16 \epsilon$, donc une variation relativement faible par rapport à la régression précédente. En revanche, au niveau de G_3 , l'impact est important. Pour $\epsilon = 0.5$, la valeur de G_3 est multipliée par 25. En fait, si on regarde l'expression (5.9), on voit qu'on a $G_3 \propto C^{-3}$. Supposons une petite variation de C : $C \xi$. On obtient alors $G_3 \propto C^{-3} (1 + \xi)^{-3}$. Un développement au premier ordre donne $G_3 \propto C^{-3} (1 - 3 \xi)$ ce qui correspond à une variation sur G_3 de $3 G_3 \xi$, soit trois fois plus importante que celle sur C . Ainsi, un écart de 5% sur C conduit à une variation

de 15% sur G_3 . Le choix de la régression sur C pourrait être amélioré afin d'obtenir la meilleure approximation possible sur la conductance équivalente G_3 .

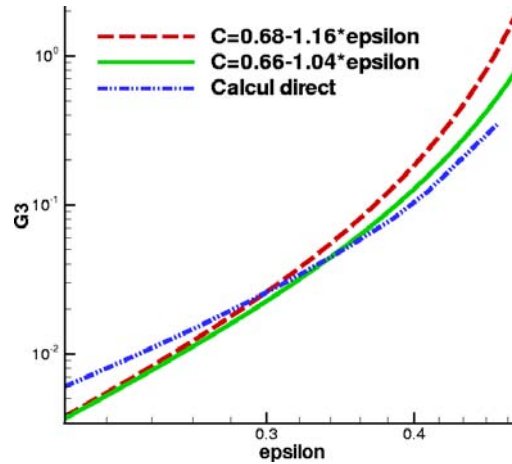


FIG. 5.11 – Comparaison de la conductance équivalente selon la régression utilisée sur le préfacteur C . $N = 512$.

5.4 Conclusion

Comme illustré dans ce chapitre, la méthode milieux effectifs permet donc d'évaluer la conductance équivalente à partir des distributions des conductances locales suffisamment loin du seuil de percolation. Le résultat est obtenu à partir d'une intégration numérique simple. La comparaison avec les calculs issus de la méthode réseau montrent une bonne concordance des résultats. De plus, la section 5.3 montre qu'il est possible d'établir une expression analytique relativement simple de la conductance équivalente.

Chapitre 6

Percolation d'invasion

6.1 Introduction

L'invasion lente d'un milieu poreux par un fluide non mouillant déplaçant un fluide mouillant est bien décrite par la théorie de la percolation d'invasion : l'invasion se fait pore par pore en choisissant le pore de moindre résistance capillaire, en général le plus grand ([40] [39] [14]). Ce processus conduit à la formation d'un motif géométrique du fluide envahissant ayant une structure complexe, fractale qui est bien analysée par le modèle de la percolation d'invasion (IP) (voir [14]). Numériquement, ce processus est très facile à mettre en oeuvre puisqu'il s'agit simplement de parcourir un arbre discret qui est associé au réseau des pores. Ce chapitre aborde la modélisation du drainage entre deux surfaces rugueuses. Le travail fait suite aux études expérimentales menées dans le cadre de la thèse d'O. Amyot [3]. Notre travail aborde l'adaptation et l'implémentation numérique de la percolation d'invasion entre deux surfaces rugueuses. Dans cette partie, nous allons présenter les grandes lignes de la percolation d'invasion, puis montrer comment le code présenté dans le chapitre 2 a été adapté afin de simuler un drainage quasi-statique entre deux surfaces rugueuses.

Concernant directement l'étanchéité, ce chapitre peut se voir comme une première étape vers l'analyse des fuites diphasiques avec changement de phase liquide-vapeur. De plus, la comparaison entre des simulations numériques et un drainage expérimental va nous permettre de confirmer le fait que l'approche réseau développée dans le cadre de ce travail permet effectivement de déterminer les chemins de fuite.

6.2 A propos des écoulements diphasiques

6.2.1 La mouillabilité dans une situation diphasique

Des forces de cohésion existent entre les différentes molécules composant un liquide. Il s'en suit que la surface des liquides a tendance à se contracter. Pour définir l'intensité de ces forces de cohésion, on parle de tension superficielle.

Supposons alors la présence de deux fluides non-miscibles α_1 et α_2 au voisinage d'un milieu solide σ . Au niveau de la surface de contact des deux fluides, il existe des tensions interfaciales, dues à l'équilibre entre les différentes forces. On obtient une situation telle que celle présentée sur la figure 6.1. L'angle θ est appelé angle de

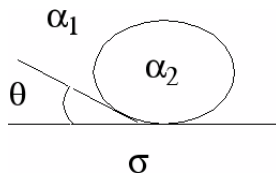


FIG. 6.1 – Angle de mouillage θ

mouillage ou angle de raccordement. Par définition, la phase solide σ est mouillable à la phase fluide i si l'angle de mouillage compté à l'intérieur de la phase fluide i est inférieur à $\pi/2$. Dans le cas présenté sur la figure 6.1, la phase solide σ est donc mouillable à la phase fluide α_1 et la phase fluide α_2 est non-mouillante. Dans le cas particulier où θ est nul, on dit que la phase solide est parfaitement mouillable à la phase fluide.

6.2.2 Drainage et imbibition

La phase de drainage est le déplacement d'un fluide mouillant par un fluide non-mouillant. L'imbibition est le déplacement d'un fluide non-mouillant par un fluide mouillant. Lorsqu'un milieu poreux est envahi par un fluide, et qu'il en éjecte un autre (ou le même dans un état différent), ce processus peut-être soit un drainage, soit une imbibition. Lors d'une imbibition à faible nombre capillaire, le fluide va envahir préférentiellement les zones à faible ouverture proches des parois solides, alors que lors d'un drainage, il va envahir les zones de grande ouverture, loin des parois solides.

6.2.3 Pression capillaire

La pression capillaire p_c est la différence de pression entre la phase non-mouillante et la phase mouillante. Lorsque le nombre capillaire ¹ est petit, on peut utiliser la loi de Laplace associée à une interface possédant un rayon de courbure R :

$$p_c = \frac{2\gamma}{R}$$

où γ est la tension interfaciale pour exprimer la différence de pression entre les deux phases. Ainsi, la pression capillaire sera d'autant plus petite que le rayon de courbure est grand.

6.2.4 Drainage quasi-statique

Lorsqu'on veut étudier l'invasion lente d'une fracture par un fluide non mouillant déplaçant un fluide mouillant, c'est-à-dire un drainage quasi-statique, on peut utiliser la Percolation d'Invasion (IP) (voir [14]). Dans cette situation, on considère que l'invasion du milieu se fait pore par pore en choisissant le pore de moindre résistance capillaire. Une adaptation élémentaire de l'algorithme d'IP consiste à considérer que la pression d'invasion d'un élément est simplement donné par :

$$P_{th} = \frac{2\gamma \cos \theta}{h}$$

où h est l'ouverture locale, γ la tension de surface et θ l'angle de contact. L'algorithme de percolation d'invasion consiste principalement à répéter les étapes suivantes : envahir une zone (un pore) où on a actuellement du fluide mouillant, zone adjacente à la région déjà envahie par le fluide non-mouillant. On peut trouver des exemples de telles études dans [20], [38], [37]. Glass *et al* [9] ont cependant critiqué le modèle IP standard car il ne prend pas en compte la courbure locale de l'interface fluide/fluide dans le plan, mais seulement dans l'épaisseur. Ils développent une variante de la méthode en prenant en compte la courbure dans le plan de manière approximative. Des comparaisons avec les expériences montrent que ce facteur a un impact non négligeable.

Notre approche poursuit les travaux de Glass *et al* dans la mesure où nous souhaitons tenir compte de la manière la plus explicite possible des deux courbures

¹On peut définir le nombre capillaire par la relation suivante : $C_a = \frac{\mu V}{\gamma}$ avec μ la viscosité dynamique du fluide, V sa vitesse et γ la tension superficielle.

principales de l'interface entre le fluide mouillant et le fluide non mouillant. Dans le cas de l'envahissement entre deux surfaces solides présentant des faibles pentes, les courbures principales sont associées au plan vertical et au plan horizontal. Dans le plan vertical, l'interface présente toujours une forme d'arc de cercle se raccordant tangentiellement au bord supérieur et inférieur avec un angle de contact θ . Ainsi, le rayon de courbure associé au plan principal est directement proportionnel à l'ouverture locale h entre les surfaces. Dans le cas d'un mouillage parfait (très proche du cas étudié expérimentalement) $\theta = 0$ et le rayon de courbure est $R_1 = \frac{h}{2}$. On voit ainsi que puisque les dimensions verticales sont beaucoup plus confinées que les dimensions horizontales, on aura $R_1 \ll R_2$ et donc la contribution de la courbure verticale à la pression capillaire est dominante. Il en résulte que, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le lieu où l'ouverture est minimale entre deux pores associés aux maxima d'ouverture est le col qui les relie. Chaque col constitue donc un lieu de blocage pour l'interface qui ne pourra envahir le maxima suivant qu'en dépassant la pression capillaire P_{th} associée à la courbure de l'interface au passage de chaque col :

$$P_{th} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux des interfaces entre les fluides mouillant et non-mouillant. A partir des résultats établis dans [4], on peut écrire pour chaque col d'ouverture h_0 et de courbure transverse h_{yy} :

$$P_{th} = \frac{2\gamma}{h_0} \left(1 + \left(\frac{3\eta\pi}{16} \right)^{2/3} \right) \quad (6.1)$$

avec $\eta = \sqrt{\frac{-h_0 h_{yy}}{2}}$. h_{yy} est aussi la valeur propre négative de la matrice hessienne au point selle associée à la direction transverse locale y .

6.3 Adaptation du code

L'algorithme d'IP peut être décrit de la façon suivante. Initialement, tous les liens sont occupés par le fluide mouillant. Le fluide non mouillant peut envahir le réseau par un des quatre bords (il s'agit du bord droit sur la figure 6.5). L'algorithme effectue une boucle sur les deux étapes suivantes :

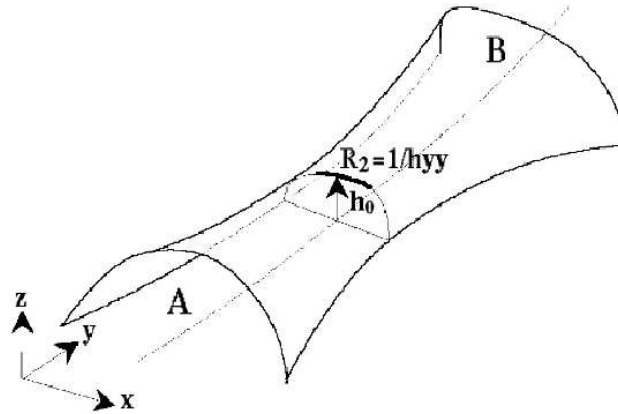


FIG. 6.2 – Passage au col

- i)* identifier les liens adjacents à la région qui a déjà été envahie et déterminer le lien qui a le plus faible seuil d'invasion.
- ii)* envahir le lien identifié ainsi que tous les liens connectés à ce dernier jusqu'à leur point selle.

Deux règles supplémentaires ont été rajoutées : les liens n'appartenant pas à l'amas percolant ne peuvent pas être envahis. De même, les liens appartenant à des bras morts (initiaux où créés à la suite de l'invasion) ne peuvent pas être envahis. L'invasion s'arrête lorsque le fluide non mouillant forme un amas allant d'un bout à l'autre (de la droite vers la gauche dans notre situation) du réseau. Des conditions périodiques sont imposées sur les bords latéraux du réseau.

Sur la figure 6.3, on a représenté l'enchaînement des opérations nécessaires pour simuler une telle invasion. Le code permet de simuler une invasion sur un champ d'ouverture aléatoire bi-périodique et gaussien. Il permet aussi de faire une simulation sur un champ d'ouverture donné possédant le même type de propriétés. En revanche, dans ce cas, étant donné que le but est de comparer avec des expériences, on enlève la périodicité : les bords latéraux sont alors étanches.

6.4 Résultats

Afin de vérifier le modèle du réseau IP, une fracture gaussienne artificielle a été construite (voir [3] pour les aspects expérimentaux) et un réseau a été généré avec le même champ d'ouverture. Ainsi, les deux champs d'ouverture de l'expérience et de

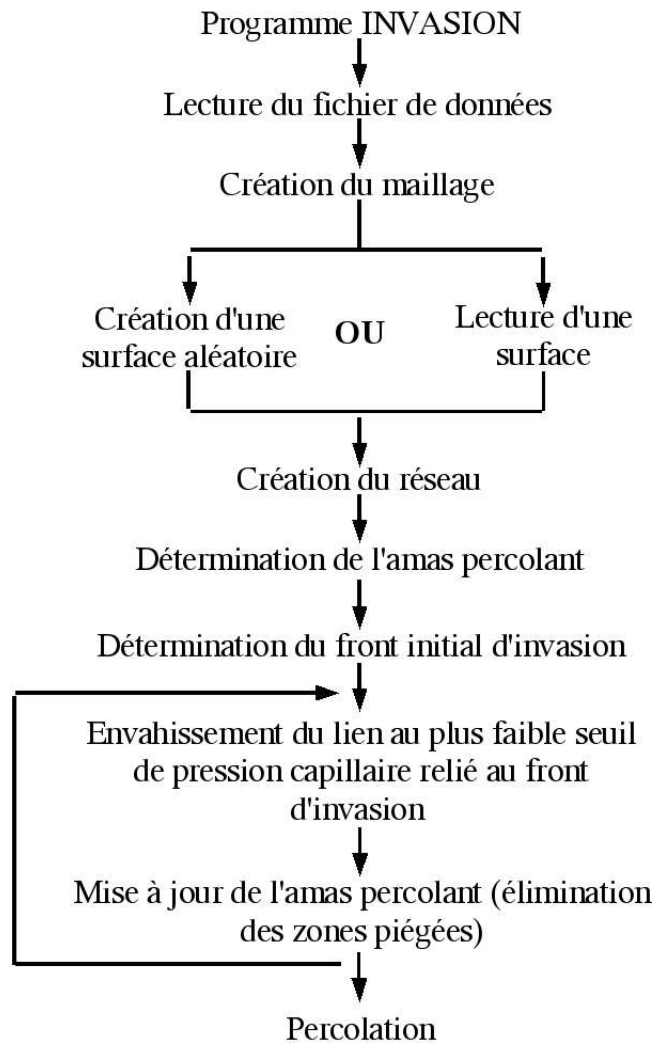


FIG. 6.3 – Structure du code de simulation de drainage quasi-statique

la simulation numérique sont identiques, aux erreurs près générées par la machine de fraisage. On a la même rugosité et les mêmes déformations des matériaux. Des observations optiques directes du processus d'invasion confirment le fait que les points selles sont les lieux géométriques contrôlant l'invasion, comme on peut le constater sur la figure 6.4. Chaque figure montre la superposition de trois objets. D'abord, on a les isovaleurs du champ d'ouverture, obtenues numériquement. Les *maxima* d'ouverture sont représentés par (o) et les points selles par (x). Les régions foncées sont des zones de contact. Ensuite, on a le réseau géodésique reliant les *maxima* entre eux, associés aux points selles. Enfin, on a la visualisation de l'interface liquide-air obtenue expérimentalement. Les six images permettent d'observer la progression de cette interface. Les régions claires sont la phase de gaz. Les régions plus foncées le

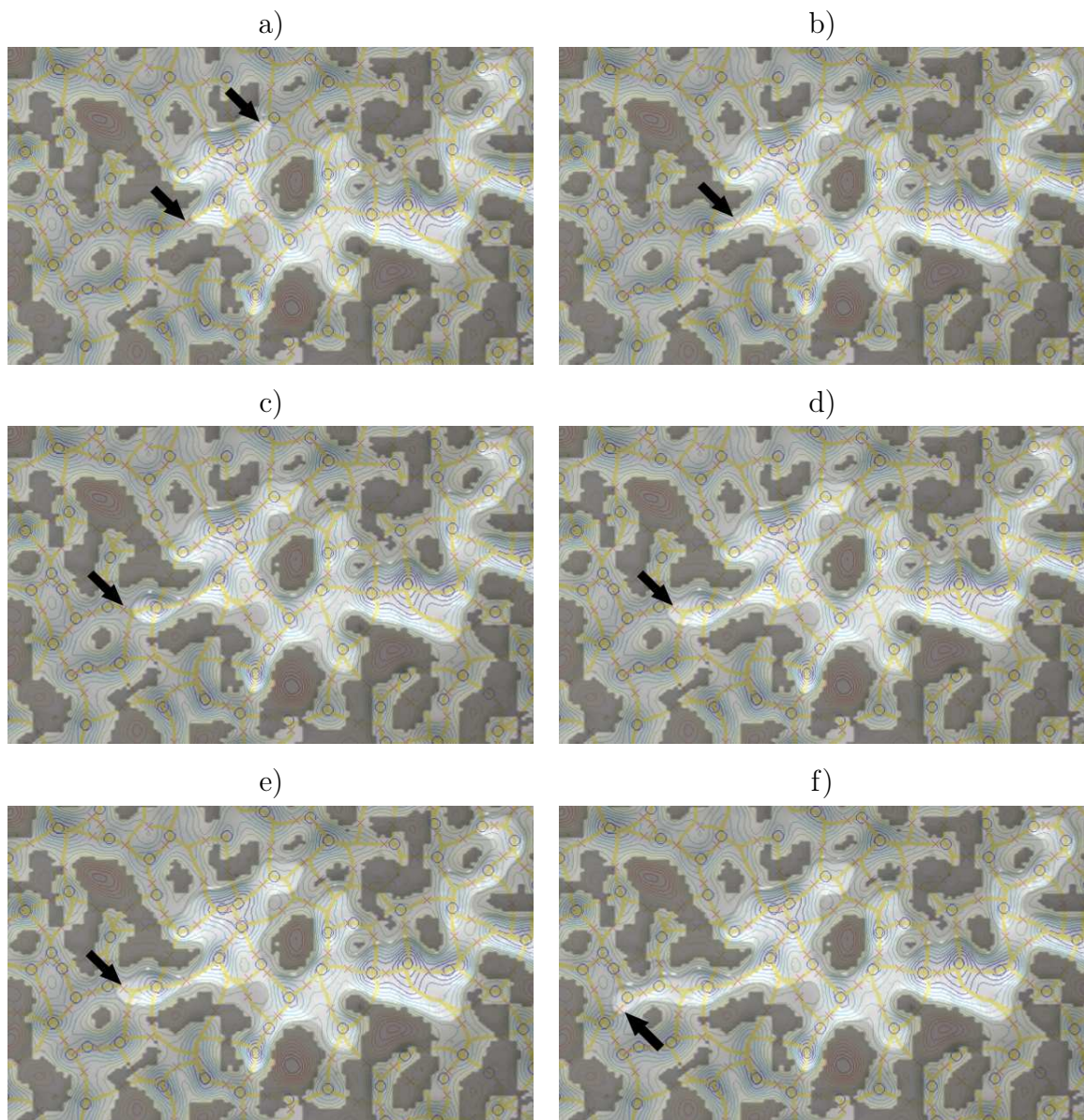


FIG. 6.4 – Observation directe du processus d’invasion.

liquide. L’air envahit l’espace poreux de plus grande ouverture. Les deux flèches dans a) montrent les endroits où l’invasion va avoir lieu dans b). Les mêmes conventions sont utilisées dans les autres figures.

Une bonne comparaison entre les expériences et les simulations peut être observée sur la figure 6.5. Un accord parfait n’est pas attendu dans la mesure où les expériences sont affectées par les imperfections du micro-modèle.

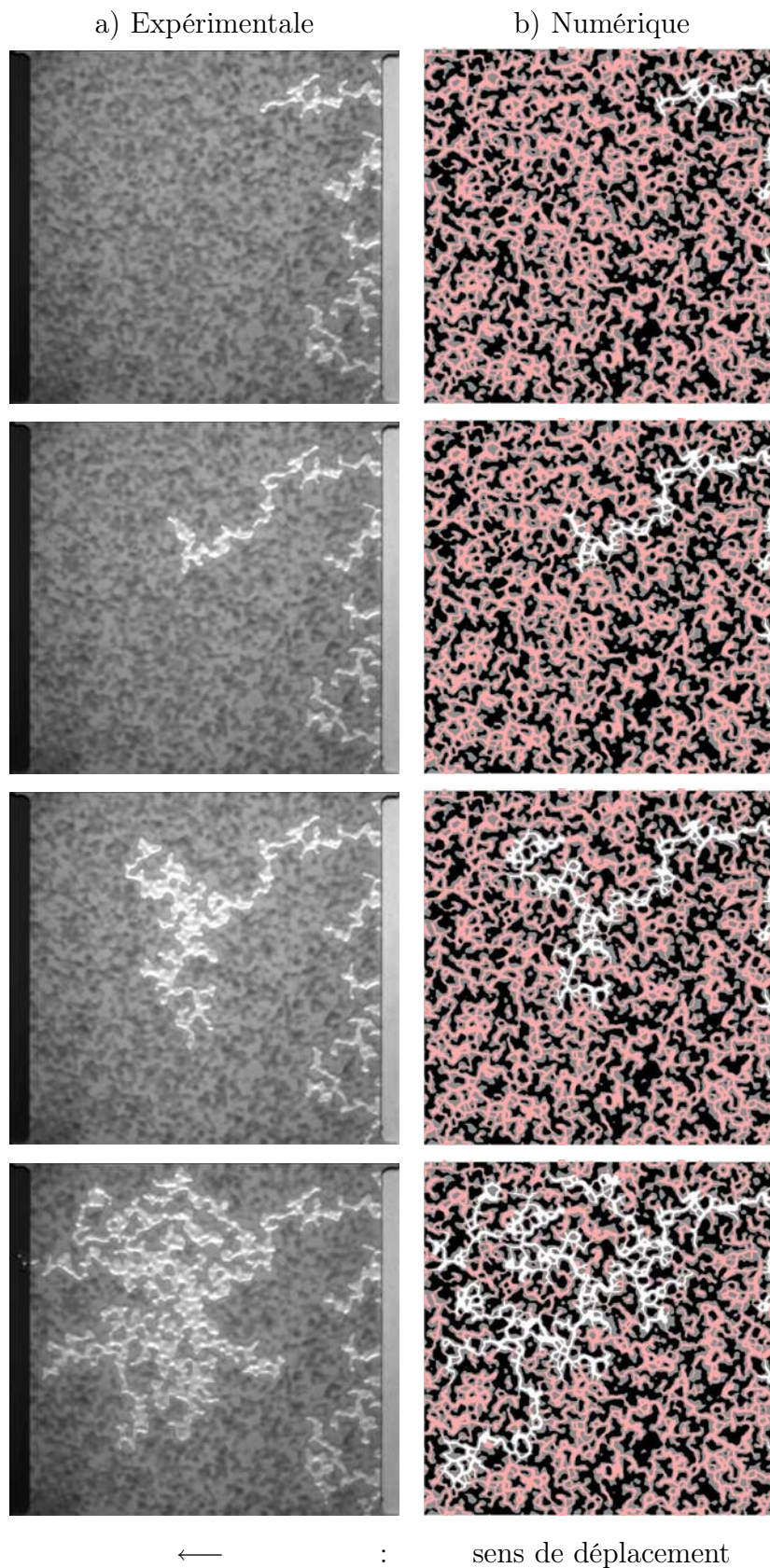


FIG. 6.5 – Comparaison de l'invasion. La phase non mouillante est en clair. Les zones en noir sont des zones de contact. Le déplacement se fait de la droite vers la gauche.

6.5 Comparaison

Sur la figure 6.6, on a représenté deux chemins d'invasion. Le chemin le plus

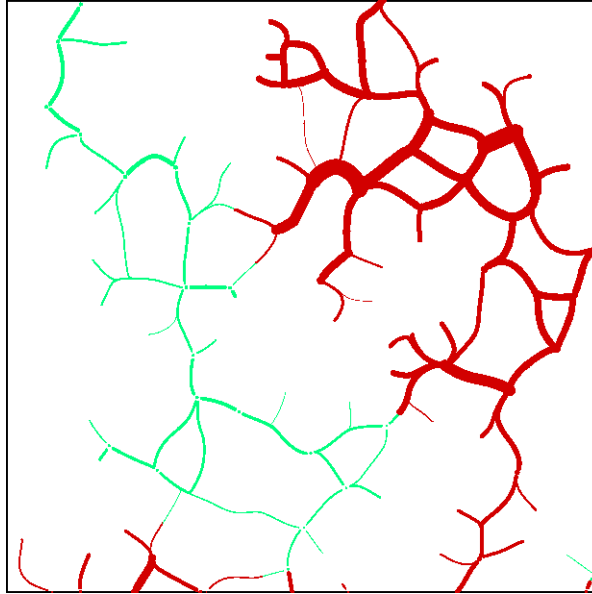


FIG. 6.6 – Comparaison de l'invasion selon le calcul du seuil. L'invasion se fait du bas vers le haut.

à droite (plus foncé) correspond à celui obtenu en calculant le seuil de pression capillaire à partir de l'ouverture au col. Celui à gauche (plus clair) correspond au seuil calculé à partir de la relation (6.1), qui tient compte de la courbure de l'interface liquide/gaz dans le plan. On voit donc que même si elle n'est pas dominante, comme l'indique déjà la formule (6.1), la contribution du terme de courbure dans le plan peut parfois conduire à des différences majeures sur la localisation des chemins d'invasions.

Les résultats présentés montre que le drainage quasi-statique dans les fractures gaussiennes peut être décrit par un algorithme standard d'IP sur un réseau aléatoire. Le réseau aléatoire est construit par identification des points critiques du champ d'ouverture (les maxima d'ouverture et les points selles). En particulier le réseau peut être vu comme le squelette topologique du réseau géodésique d'ouverture. Cette approche réseau a été créée pour des systèmes ayant des aires de contact significatives, afin que les constriction soient bien définies, c'est-à-dire que les cols se différencient nettement au milieu des vallées.

Chapitre 7

Conclusions et perspectives

Notre travail a été motivé par l'étude de l'étanchéité statique de systèmes boulonnés avec comme objectif général de mieux comprendre les mécanismes de fuites à partir du développement et de l'exploitation d'un outil de calcul spécialement construit dans ce but. Nous avons fait le choix de travailler avec des surfaces modèles (surfaces isotropes corrélées à courte portée). De ce fait, il est clair que ce travail ne représente qu'une étape. L'influence de certains aspects mis en évidence dans le cadre du GDR mais négligés dans notre travail, comme la structure multi-échelle des surfaces ou leur forte anisotropie, devra faire l'objet d'études spécifiques. Le choix de travailler avec des surfaces volontairement simplifiées doit donc se comprendre comme s'inscrivant dans une logique de complexité croissante. En dépit de son caractère idéalisé, le système que nous avons étudié nous semble riche d'enseignements de nature à éclairer de façon intéressante la problématique de l'étanchéité, ce qui justifie en quelque sorte a posteriori le choix effectué. D'un point de vue plus général les surfaces aléatoires corrélées à courte portée représentent un système modèle souvent considéré dans la littérature en relation avec différents domaines d'applications (écoulement et transport dans les fractures, laminage,...). Toutefois, aucune étude ne s'était intéressée, à notre connaissance, aux comportements de la conductance hydraulique près du seuil de percolation. L'étude de ce comportement a nécessité, pour ce qui nous concerne, de développer une approche réseau s'appuyant sur l'identification des points critiques du champ des ouvertures ainsi que l'étude spécifique de la conductance hydraulique d'un lien (via une analyse asymptotique dont les résultats étaient disponibles au début de la thèse). Physiquement, ceci se traduit par le fait que les chutes de pression sont localisées aux cols du champ des ouvertures. De ce

fait, le modèle réseau développé peut se voir comme la représentation asymptotique discrète du problème de transport continu, ce qui lui confère un caractère différent et plus rigoureux que dans la plupart des modèles réseaux développés pour l'étude des milieux poreux. Le développement de l'approche réseau a été ici un élément clé de l'étude du comportement près du seuil en raison des gains très importants en termes de rapidité de calcul et de taille mémoire en comparaison avec une approche directe. Comme cela a été illustré au chapitre 6, le modèle réseau est également bien adapté à la simulation de certaines classes d'écoulements diphasiques. La mise au point, l'amélioration et l'exploitation du code réseau ont ainsi constitué l'essentiel de ce travail de thèse. Ceci nous a permis d'obtenir les principaux résultats suivants dans le cas où la déformation des aspérités est prise en compte à l'aide d'un simple modèle d'écrêtage géométrique des sommets des aspérités :

- les conductances hydrauliques locales (*i.e.* des liens) sont distribuées en loi puissance d'exposant $\approx -2/3$ suffisamment près du seuil de percolation.
- la moyenne d'ensemble de la conductance électrique G_1 (respectivement hydraulique G_3) d'un pavé (système formé par la mise en contact d'une surface lisse et d'une surface gaussienne ou ce qui est équivalent de deux surfaces gaussiennes non intercorrélées) se comporte en loi puissance près du seuil de percolation, $G = G_0(N) (A_c - A)^t$, $G = G_0(N) \epsilon^t$. Ceci est conforme à ce qu'on attend dans le cadre de la théorie de la percolation. Le point essentiel nouveau concerne la valeur de l'exposant. Nous avons trouvé $t = 0.6$ (conductance électrique) et $t = 2.8$ (conductance hydraulique). Ces valeurs sont différentes de la valeur classique $t = 1.3$, qui est obtenue lorsque les conductances locales des liens sont gelées (elles ne varient pas avec l'écart au seuil) et distribuées suivant des lois classiques (distributions étroites). Elles diffèrent également de ce qu'on attend pour des conductances locales gelées mais distribuées en loi puissance. D'après [32], on s'attend dans ce cas à $t = 3$ pour les distributions en $g_3^{-2/3}$ du cas hydraulique. Ceci nous amène à conclure que le système étudié, caractérisé dans le cas hydraulique par des conductances locales variant en fonction de l'écart au seuil et distribuées en loi puissance, conduit à un comportement non-universel différent de celui mis en évidence dans [32].
- la combinaison de ces résultats (décrivant le comportement près du seuil) et d'une approximation des milieux effectifs (loin du seuil) permet de prédire rai-

sonnablement bien la conductance, tant électrique que hydraulique sur l'ensemble de la gamme d'aire de contact.

Le code développé permet de prendre en compte des déformations élastiques grâce à l'intégration d'un module de calcul développé au LAMCOS par P.Sainsot. Ceci a permis de mettre en évidence les résultats suivants :

- l'exposant de la relation charge-déplacement en déformation élastique pour les déplacements supérieurs à un écart-type ($\delta > \sigma$) diffère significativement de celui prédit par la théorie de Hertz (environ 9/2 contre la valeur classique 3/2). Ceci est interprété comme la conséquence d'un effet coopératif entre aspérités.
- la transition de percolation (pour une taille de surface donnée) est plus brutale qu'en érosion géométrique.

Ceci montre clairement une influence du mode de déformations sur les résultats. Le comportement en loi puissance de la moyenne de la conductance hydraulique près du seuil en fonction de l'écart au seuil est retrouvé mais avec un exposant t plus petit (2.2 contre 2.8) que dans le cas de l'érosion géométrique. Il est noté que l'étude statistique est plus difficile à conduire dans le cas élastique. En particulier, la détection du seuil de percolation est moins précise que dans le cas de l'érosion géométrique. En conséquence, le cas élastique mériterait certainement de faire l'objet d'une étude plus approfondie. Quoiqu'il en soit, ces résultats suggèrent aussi qu'il serait intéressant d'étudier d'autres régimes de déformation (élasto-plastique par exemple) de façon à développer progressivement une modélisation plus réaliste des déformations (dans ce contexte, on peut noter que le domaine de validité du modèle d'érosion géométrique reste à préciser).

Pour en revenir maintenant plus directement au problème de l'étanchéité, notre étude a montré comment les effets de taille finie conduisent naturellement à une approche probabiliste du problème à l'échelle des pavés, dans la mesure où le calcul de la fuite, c'est-à-dire de la conductance hydraulique, montre l'existence de très fortes fluctuations. Cet aspect est générique à tout système réel proche du seuil de percolation.

Les perspectives à ce travail sont nombreuses. Nous en avons déjà mentionnées quelques-unes : étude de l'impact de modèles de déformations des aspérités plus réalistes (cas élastique à approfondir, modèle elasto-plastique, domaine de validité du modèle d'érosion géométrique à préciser,...), surfaces plus réalistes (multi-échelles,

striées,..). Du côté des fluides, nous nous sommes limités à des écoulements visqueux incompressibles à bas nombre de Reynolds. Comme indiqué en annexe, il est facile d'adapter le modèle réseau au cas des écoulements de gaz (à faibles nombres de Mach et de Reynolds) en remplaçant la pression par un potentiel adapté, le carré de la pression par exemple pour un gaz parfait, tant qu'on peut ignorer les effets de raréfaction. Les cas où ces derniers ne sont plus négligeables mériteraient d'être étudiés en détail. Comme indiqué au cours de ce travail, la fuite dans certaines circonstances peut s'effectuer via un changement de phase liquide-vapeur, situation où presque tout reste à faire ...

Annexe A

Analyse du transport dans le cas d'un gaz

A.1 Equations de transport

A.1.1 Avec adhérence à la paroi

On s'intéresse au transport d'un gaz qui est dans des conditions telles qu'on peut appliquer la relation de Stokes :

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{1}{\mu} \nabla p$$

Contrairement au cas des liquides, on ne peut pas considérer que les gaz soient incompressibles. En revanche, si on considère l'approximation des gaz parfaits, on peut écrire :

$$\frac{p}{\rho} = c_g$$

où c_g est une constante dépendant du gaz considéré. On utilise toujours des conditions d'adhérence à la paroi. On peut donc écrire la relation suivante, donnant le débit linéique massique de gaz Q_m :

$$Q_m = -\frac{c_g}{\mu} g_g \frac{\Delta p^2}{L}$$

avec g_g la conductance hydraulique pour un gaz. On constate donc que le potentiel à considérer n'est plus la pression, mais la pression au carré et que le coefficient en préfacteur n'est plus l'inverse de la viscosité dynamique, mais le rapport c_g/ν . L'adaptation au cas des gaz avec l'hypothèse de non-glissement est donc immédiate.

A.1.2 Avec un glissement du premier ordre

Jusqu'à présent, on a fait l'hypothèse d'une adhérence à la paroi ($K_n < 0.01$). Or, comme il a été dit dans la partie 1.3, on peut, dans les situations étudiées, se trouver en présence d'un glissement à la paroi ($0.01 < K_n < 15$). On se limite à présenter l'impact d'un glissement du premier ordre, approximation qui paraît suffisante pour notre problème d'après les résultats donnés dans [33]. Dans ce cas, la vitesse à la paroi s'écrit [11] :

$$u_g = a \lambda \frac{\partial u}{\partial z}$$

où λ est le libre parcours moyen des molécules et a un coefficient de surfaces. Il s'exprime en fonction de α , le coefficient d'accomodation de la surface, par $a = (2 - \alpha)/\alpha$. Le cas $\alpha = 0$ correspondrait à une surface absorbant toutes les particules, $\alpha = 1$ une surface réfléchissant toutes les molécules avec le même angle que lors de l'impact (une surface parfaitement "lisse"). On introduit donc une longueur de glissement l_g , qui vaut [11] :

$$l_g = a \lambda$$

Cette longueur correspond à la distance au-delà de la paroi où la vitesse serait nulle si on prolongeait le profil de vitesse (voir figure A.1). On peut donc écrire la même

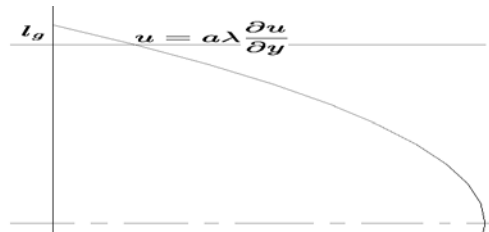


FIG. A.1 – Illustration de la longueur de glissement

relation que précédemment sur le débit linéique massique de gaz Q_m :

$$Q_m = -\frac{c_g}{\mu} g_{gl} \frac{\Delta p^2}{L}$$

En revanche, la conductance g_{gl} fait intervenir λ , ce qui complique le problème, dans la mesure où le libre parcours moyen dépend de la pression puisque pour un gaz parfait, le produit entre ces deux grandeurs est constant :

$$\lambda p = \text{constante}$$

D'une manière générale, l'analyse est donc compliquée car le nombre de Knudsen dépend du petit paramètre géométrique $\eta = \sqrt{h_0 h_{xx}}$ sur lequel on s'appuie pour obtenir l'expression asymptotique 2.3, 32. L'étude détaillée de cette situation reste donc à faire.

A.2 Impact du glissement

En deux dimensions, on peut écrire les relations suivantes sur les conductances locales g_i calculées entre deux points situés à l'abscisse s_1 et s_2 :

$$\begin{aligned} g_1^{-1} &= - \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{h(s)} ds \\ g_3^{-1} &= -12 \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{h^3(s)} ds \\ g_g^{-1} &= -24 \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{h^3(s)} ds \\ g_{gl}^{-1} &= -24 \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{h^3(s)(1+6aKn)} ds \end{aligned} \tag{A.1}$$

A la vue de ces relations, on conçoit aisément que le calcul de g_g se fait de la même manière que g_3 et g_1 . La différence principale vient du fait que pour écrire ces relations, on fait l'hypothèse que la pression varie linéairement dans les deux premiers cas, et que c'est le carré de la pression qui varie linéairement dans les deux autres cas. En revanche, les trois premières relations font appel uniquement à des caractères géométriques (l'ouverture h), alors que la troisième relation fait appel au nombre de Knudsen Kn . Or :

$$Kn \propto \frac{1}{ph}$$

On a donc une dépendance à la pression. Si on fait le rapport des deux conductances, on a :

$$\frac{g_{gl}}{g_g} = \frac{\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{h^3(s)} ds}{\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{h^3(s)(1+6aKn)} ds}$$

En supposant qu'on soit dans un canal droit (h constant), on a un rapport de :

$$\frac{g_{gl}}{g_g} = |s_2 - s_1| \left(\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{(1+6aKn)} ds \right)^{-1}$$

Comme la valeur de Kn reste petite pour un glissement de premier ordre, on peut écrire :

$$\frac{g_{gl}}{g_g} = |s_2 - s_1| \left(\int_{s_1}^{s_2} 1 - 6aKn + O(Kn^2) ds \right)^{-1}$$

La pression entre s_1 et s_2 évolue comme $p^2 = p_{s_1}^2 + \frac{p_{s_2}^2 - p_{s_1}^2}{s_2 - s_1} (s - s_1)$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{g_{gl}}{g_g} = 1 + \frac{12 a}{\frac{1}{Kn_{s_1}} + \frac{1}{Kn_{s_2}}} + O(Kn^2)$$

En notant $\frac{2}{\overline{Kn}} = \frac{1}{Kn_1} + \frac{1}{Kn_2}$ le nombre de Knudsen moyen sur ce canal, on a finalement le rapport :

$$\frac{g_{gl}}{g_g} = 1 + 6 a \overline{Kn} + O(Kn^2)$$

Dans les situations qui nous intéressent, on a $0.01 < Kn < 0.1$ et a vaut au plus 1. Ce rapport de conductance est donc au plus de l'ordre de 2. Dans un canal droit, l'impact du glissement sera donc d'un facteur 2 au plus sur la fuite.

Afin de confirmer ce résultat obtenu de manière très simple, nous avons résolu les équations pour les gaz données par les relations (A.1) par une méthode de Runge-Kutta à l'ordre 2. Pour g_g , nous avons comparé les résultats obtenus avec la résolution analytique. On observe alors que l'erreur induite par la résolution numérique est inférieure à l'ordre du carré sur le pas de calcul (qui correspond à la discrétisation spatiale). Pour les divers cas testés, on observe aussi que le rapport entre la conductance pour les gaz avec ou sans glissement reste toujours inférieur à 2.

Annexe B

Interpolation polynômiale de Lagrange

Soit $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ et α_i avec $i \in R$. Il existe un polynome unique P de degré inférieur ou égal à n tel que $P(x_i) = \alpha_i \forall i$. On obtient $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i$ où les polynômes L_i vérifient $L_i(x_j) = \delta_{ij}$:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Méthode de Newton Supposons qu'on veuille obtenir le polynôme L_f de degré inférieur ou égal à n valant $f(x_i)$ en x_i , i allant de 0 à n . On forme les différences divisées de f :

$$\begin{aligned} \delta[y] &= f(y) \\ \delta[y_1, y_2] &= \frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2} \\ \delta[y_1, \dots, y_k] &= \frac{\delta[y_1, \dots, y_{k-1}]}{y_1 - y_k} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \delta[y_1, \dots, y_k] &= \sum_{i=1}^{i=k} \frac{f(y_i)}{\prod_{j \neq i} (y_i - y_j)} \\ L_f(x) &= \sum_{k=0}^n \delta[x_0, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{j=k-1} (x - x_j) \end{aligned}$$

L_f est le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n pour la fonction f . Les différences divisées sont aussi appelées coefficients de Newton.

13 ANNEXE B. INTERPOLATION POLYNÔMIALE DE LAGRANGE

Approximation de f Supposons que $f \in C^{(n+1)}$. A partir de son développement en série de Taylor, on peut calculer l'erreur maximale que représente l'approximation de f par L_f :

$$\|f - L_f(x)\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \left\| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Si f et ses dérivées sont suffisamment régulières, et que l'intervalle retenu pour l'approximation est suffisamment petit, alors L_f constitue une bonne approximation de f sur $[x_0, x_n]$.

Cas particulier de l'interpolation d'une surface avec $n = 2$ On va utiliser la méthode précédemment décrite afin de calculer la valeur de $f(x, y)$ au point $M(a, b)$ à partir des valeurs de $f(x_i, y_j)$ avec $(i, j) \in [0, 2] \times [0, 2]$ et tels que $(a, b) \in [x_0, x_2] \times [y_0, y_2]$. Pour cela, on va procéder à 4 interpolations. On forme tout d'abord les 3 polynômes L_i de degré 2 correspondant aux approximations des fonctions $f(x, y_i)$, pour i allant de 0 à 2 à partir des valeurs de $f(x_0, y_i), f(x_1, y_i), f(x_2, y_i)$. On calcule ensuite les 3 valeurs $L_i(a)$. A partir de ces 3 valeurs, on forme le polynome $L_f(y)$ et on calcule la valeur $L_f(b)$. Cette dernière valeur correspond à une interpolation de f au point $M(a, b)$.

Les relations correspondantes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} L_0(a) &= f(x_0, y_0) + \frac{f(x_0, y_0) - f(x_1, y_0)}{x_0 - x_1} \cdot (a - x_0) \\ &+ \frac{\frac{f(x_0, y_0) - f(x_1, y_0)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0)}{x_0 - x_1}}{x_0 - x_2} \cdot (a - x_0)(a - x_1) \\ L_1(a) &= f(x_0, y_1) + \frac{f(x_0, y_1) - f(x_1, y_1)}{x_0 - x_1} \cdot (a - x_0) \\ &+ \frac{\frac{f(x_0, y_1) - f(x_1, y_1)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1)}{x_0 - x_1}}{x_0 - x_2} \cdot (a - x_0)(a - x_1) \\ L_2(a) &= f(x_0, y_2) + \frac{f(x_0, y_2) - f(x_1, y_2)}{x_0 - x_1} \cdot (a - x_0) \\ &+ \frac{\frac{f(x_0, y_2) - f(x_1, y_2)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_1, y_2) - f(x_2, y_2)}{x_0 - x_1}}{x_0 - x_2} \cdot (a - x_0)(a - x_1) \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} L_f(b) &= L_0(a) + \frac{L_0(a) - L_1(a)}{y_0 - y_1} \cdot (b - y_0) \\ &+ \frac{\frac{L_0(a) - L_1(a)}{y_0 - y_1} - \frac{L_1(a) - L_2(a)}{y_0 - y_1}}{y_0 - y_2} \cdot (b - y_0)(b - y_1) \end{aligned}$$

On a donc :

$$f(a, b) \simeq L_f(b)$$

la qualité de l'approximation dépendant de la variation de f .

Annexe C

Recherche des points caractéristiques sur une surface

Nous ne présenterons pas toutes les méthodes possibles afin d'obtenir les lieux des points caractéristiques d'une surface. Nous nous limiterons à celle que nous utilisons dans le cadre de cette étude. Dans tous les cas, on procède de la manière suivante. On considère un point $X_1 = (x_1, y_1)$ qu'on suppose proche d'un point caractéristique. On va chercher à se rapprocher de celui-ci en prenant la direction $\Delta X_1 = (\delta x_1, \delta y_1)$ avec un pas α_1 (positif). On obtient ainsi le point $X_2 = (x_2, y_2)$:

$$X_2 = X_1 + \alpha_1 \Delta X_1$$

Les méthodes se différencient sur la façon d'obtenir la direction et le pas de recherche.

C.1 Méthode de la plus grande pente

Cette méthode est adaptée dans le cas d'un problème de minimisation (resp. maximisation) : on cherche à atteindre un minimum (resp. maximum) de la fonction $f(x, y)$. Dans ce cas, la direction de recherche est celle de l'opposé du gradient de la fonction :

$$\Delta X_1 = -\nabla f(X_1)$$

Cette direction n'est forcément la direction optimale pour converger vers le minimum puisque nous ne disposons que d'une information locale sur la fonction, mais elle va tout de même nous diriger vers une valeur de la fonction f plus petite qu'au point X_1 .

On obtient donc :

$$X_2 = X_1 - \alpha_1 \nabla f(X_1)$$

et il reste à calculer α_1 . Pour cela, il existe différentes méthodes. Etant donné qu'il s'agit d'un problème d'optimisation à une variable, on peut éventuellement envisager une recherche dichotomique, bien que ce ne soit pas optimale. Dans notre étude, nous n'effectuons pas de recherche sur α . Nous imposons sa valeur égale à :

$$\alpha_1 = \frac{l}{\|\nabla f(X_1)\|} L$$

où L dépend des caractéristiques géométriques de la surface.

Cette méthode a l'avantage de demander relativement peu d'opérations. Elle permet de se rapprocher du point recherché, mais elle a parfois du mal à converger.

C.2 Méthode de Newton

La méthode de Newton est basée sur le développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction f :

$$f_2(X_2) = f(X_1) + \alpha_1 \nabla f(X_1) \Delta X_1 + \frac{\alpha_1^2}{2} \Delta X_1 H_f(X_1) \Delta X_1$$

f_2 est le développement de Taylor de f à l'ordre 2 et H_f la hessienne de f . Pour trouver la direction de recherche, on ne va pas chercher à minimiser la fonction, mais on va chercher à minimiser la norme du gradient de la fonction (puisqu'un point caractéristique correspond à un point de gradient nul). De plus, on va chercher ΔX_1 en tant que vecteur de déplacement, et non plus en tant que direction, soit $\alpha_1 = 1$. On a donc :

$$f_2(X_2) = f(X_1) + \nabla f(X_1) \Delta X_1 + \Delta X_1 H_f(X_1) \Delta X_1$$

Le gradient de f_2 en X_2 vaut :

$$\nabla f_2(X_2) = \nabla f(X_1) + H_f(X_1) \Delta X_1$$

On va donc choisir ΔX_1 tel que $\nabla f_2(X_2) = 0$, ce qui implique :

$$H_f(X_1) \Delta X_1 = -\nabla f(X_1) \tag{C.1}$$

La résolution de ce système linéaire nous donne :

$$\delta x_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2}$$

$$\delta x_2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2}$$

Cette méthode est plus coûteuse que la précédente puisqu'elle demande plus de calculs. En revanche, sa convergence est bien meilleure.

C.3 Méthode de Quasi-Newton

Cette méthode est dérivée de la précédente. Le principe est le même, si ce n'est qu'on ne calcule pas les dérivées secondes de la fonction. Pour résoudre le système C.1, on va utiliser une approximation de l'inverse de la hessienne D_f qu'on évalue grâce à la méthode BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno) :

$$D_f(X_2) = D_f(X_1) + \left(1 + \frac{g D_f(X_1)g}{d \cdot g}\right) \frac{dd^T}{d \cdot g} - \frac{D_f(X_1)gd^T + dgD_f(X_1)}{d \cdot g}$$

avec

$$d = X_1 - X_0$$

$$g = \nabla f(X_1) - \nabla f(X_0)$$

On remarque qu'on utilise une technique itérative, sachant qu'au premier pas de calcul, on choisit D_f égale à la matrice identité (ou son opposé).

Cette méthode converge bien et possède l'avantage de ne pas nécessiter le calcul des dérivées secondes de la fonction.

Annexe D

Un exemple de stockage compact

Voici un exemple afin d'illustrer cette technique de stockage. On considère la matrice R :

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 \\ c & d & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & f & g & 0 \\ h & 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & 0 & l \end{pmatrix}$$

Le vecteur des éléments est le suivant :

$$v_{el} = (a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h \ i \ j \ k \ l)$$

Le vecteur des numéro de colonne :

$$v_i = (1 \ 4 \ 1 \ 2 \ 5 \ 3 \ 4 \ 1 \ 4 \ 5 \ 3 \ 5)$$

et le vecteur des places des éléments diagonaux (on rajoute un sixième élément afin de faciliter la manipulation des vecteurs) :

$$v_j = (1 \ 4 \ 6 \ 9 \ 12 \ 13)$$

Ainsi, la place en mémoire nécessaire au stockage est, dans le cas où R comporte des réels double précision stockés 8 octets (valable pour les machines utilisées dans le cadre de cette étude) et des entiers stockés sur 2 octets :

$$\begin{aligned} R &\rightarrow 25 * 8 \text{ octets} \\ v_{el} &\rightarrow 12 * 8 \text{ octets} \\ v_i &\rightarrow 12 * 2 \text{ octets} \\ v_j &\rightarrow 6 * 2 \text{ octets} \end{aligned}$$

On fait une économie de 68 octets pour ce tout petit système. En moyenne, on a :

$$\begin{aligned} R &\rightarrow \frac{N^4}{16\pi^4} * 8 \text{ octets} \\ v_{el} &\rightarrow 5 \frac{N^2}{4\pi^2} * 8 \text{ octets} \\ v_i &\rightarrow 5 \frac{N^2}{4\pi^2} * 2 \text{ octets} \\ v_j &\rightarrow \frac{N^2}{4\pi^2} * 2 \text{ octets} \end{aligned}$$

ce qui fait en moyenne une économie de $\frac{N^2}{\pi^2} \left(\frac{N^2}{\pi^2} - 26 \right)$ octets, expression positive pour $N > 16$.

Bibliographie

- [1] P. M. Adler. *Porous media : geometry and transports*. Butterworth/Heinemann, 1992.
- [2] P. M. Adler and J.F. Thovert. *Fractures and Fracture Networks*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [3] O. Amyot. *Contribution à l'étude des écoulements diphasiques à travers un contact rugueux*. PhD thesis, Université de Poitiers, France, 2004.
- [4] O. Amyot, F. Flukiger, S. Geoffroy, F. Plouraboué, and M. Prat. Quasi-static drainage between two rough surfaces. pre-print.
- [5] C. Baudet, E. Charlaix, E. Clement, J.P. Hulin, E. Guyon, and C. Leroy. Physique statistique dans les milieux poreux hétérogènes. Technical report, Groupe Poreux de l'ESPCI.
- [6] M.J. Blunt, M.D. Jackson, M. Piri, and P.H. Valvatne. Detailed physics, predictive capabilities and macroscopic consequences for pore-network models of multiphase flow. *Advances In Water Resources*, 25 :1069–1089, 2002.
- [7] S. Feng, B.I. Halerpin, and P.N. Sen. Transport properties of continuum systems near the percolation threshold. *Physical Review B*, 35 :197–214, 1987.
- [8] J. Frêne. *Lubrification hydrodynamique : paliers et butées*. 1990.
- [9] R.J. Glass, M.J. Nicholl, and L. Yarrigton. A modified invasion percolation model for low-capillary number immiscible displacements in horizontal rough-walled fractures : influence of local in-plane curvature. *Wat.Res.Res.*, 34(12) :3215–3234, 1998.
- [10] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [11] E.H. Kennard. *Kinetic Theory of Gases with an Introduction to Statistical Mechanics*. New York and London, 1938.

-
- [12] S. Kirkpatrick. Percolation and conduction. *Reviews of Modern Physics*, 45 :574–588, 1973.
- [13] P.M. Kogut and J.P. Straley. Distribution-induced non-universality of the percolation conductivity exponents. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 12 :2151–2159, 1979.
- [14] R. Lenormand, E. Touboul, and C. Zarcone. Numerical models and experiments on immiscible displacements in porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 189 :165–187, 1988.
- [15] J.F. Luciani. Etanchéité statique en milieux extrêmes. Rapport scientifique du GDR 0518. Technical report, LMS, 1997-2000.
- [16] H.A. Makse, S. Havlin, and H.E. Schwartz, M. ans Stanley. Method for generating long-range correlation for large systems. *Phys. Rev. E*, 53 :5445, 1996.
- [17] J. Martin. Etanchéité en mécanique. *Les Techniques de l'Ingénieur : traité de génie mécanique*, 1985.
- [18] C. Mayeur, P. Sainsot, and L. Flamand. A numerical elastoplastic model for rough contact. *ASME Journal of Tribology*, 117 :422–429, 1995.
- [19] J.I. McCool. Comparison of models for the contact of rough surfaces. *Wear*, 107 :37–60, 1986.
- [20] C.A. Mendoza and E.A. Sudicki. Hierarchical scaling of constitutive relationships controlling multi-phase flow in fractured geologic media, in reservoir characterization. In *3rd International Technical Conference : Papers*, 1991.
- [21] V.V. Mourzenko, O. Galamay, J.F. Thovert, and P.M. Adler. Fracture deformation and influence on permeability. *Physical Review E*, 56 :3167–3184, 1997.
- [22] V.V. Mourzenko, J.F. Thovert, and P.M. Adler. Permeability of a single fracture; validity of the Reynolds equation. *J. Phys. II*, 5 :465–482, 1995.
- [23] V.V. Mourzenko, J.F. Thovert, and P.M. Adler. Geometry of simulated fractures. *Physical Review E*, 53 :5606–5626, 1996.
- [24] V.V. Mourzenko, J.F. Thovert, and P.M. Adler. Percolation and conductivity of self-affine fractures. *Physical Review E*, 59 :4265–4284, 1999.
- [25] F. Plouraboué, F. Flukiger, M. Prat, and P. Crispel. Random heterogeneous geodesic network method for flows between two rough surfaces in contact. (soumis).

- [26] F. Plouraboué, S. Geoffroy, and M. Prat. Conductances between confined rough walls. *Physics of Fluids*, 16(3) :615–624, 2004.
- [27] F. Plouraboué, M. Prat, and N. Letalleur. Sliding lubricated anisotropic rough surfaces. *Physical Review E*, 64 :011202–1,011202–10, 2001.
- [28] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 1990.
- [29] M. Sahimi. *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock*. VCH, Weinheim, 1995.
- [30] D. Stauffer and A. Aharony. *Introduction to Percolation Theory*. Taylor and Francis, 1992.
- [31] O. Stenull and H.K. Janssen. Conductivity of continuum percolating systems. *Physical Review E*, 64 :056105–056114, 2001.
- [32] J.P. Straley. Non-universal threshold behaviour of random resistor networks with anomalous distributions of conductances. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 15 :2343–2346, 1982.
- [33] A.Z. Szeri. *Fluid film lubrication - Theory and design*. Cambridge University Press, 1998.
- [34] R.E. Tarjan. Depth-first search and linear algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 1 :146–160, 1972.
- [35] J.M. Teuler. [http ://www.idris.fr/data/publications/jmfft](http://www.idris.fr/data/publications/jmfft). Technical report, Idris, 1990.
- [36] J.F. Torquato. *Random Heterogeneous Material*. Springer Verlag, 2001.
- [37] K. Vandersteen, J. Carmeliet, and J. Feyen. A network modeling approach to derive unsaturated hydraulic properties of a rough-walled fracture. *Transport in Porous Media*, 50 :197–221, 2003.
- [38] G. Wagner, P. Meakin, J. Feder, and Jossang T. Invasion percolation on self-affine topographies. *Phys. Rev. E*, 55 :1698–1703, 1997.
- [39] D. Wilkinson. Percolation model of immiscible displacement in the presence of buoyancy forces. *Phys.Rev.A*, 30 :520–531, 1984.
- [40] D. Wilkinson and J.F. Willemsen. Invasion percolation : a new form of percolation theory. *J.Phys.A-Math.Gen.*, 16 :3365–3376, 1983.

Etude statistique de la conductance d'un joint d'étanchéité statique

Résumé

Cette thèse est motivée par l'étude de l'étanchéité des systèmes boulonnés où un joint métallique est placé entre deux brides de serrage. L'objectif est de mieux comprendre les mécanismes de la fuite en développant de nouveaux outils de calculs afin de la modéliser et l'estimer.

Dans ce travail, le champ d'ouverture entre les deux surfaces en contact est modélisé par un champ Gaussien aléatoire isotrope corrélé à courte portée. Le système est découpé en pavés élémentaires représentatifs. La conductance à l'échelle du joint est déduite de l'étude statistique à l'échelle du pavé. Nous avons développé dans le cadre de l'approximation de lubrification un code de calcul fondé sur une approche réseau, qui permet de ramener le calcul de la conductance à l'échelle du pavé à un problème de résistances distribuées sur un réseau aléatoire. Le réseau est construit à partir de l'identification des points critiques du champ d'ouverture. Les maxima de ce champ sont reliés entre eux, via les cols, par des liens. La conductance d'un lien est calculée en fonction des caractéristiques géométriques du col.

Dans un premier temps, on considère que le champ d'ouverture se déforme de façon purement plastique selon un modèle d'écrêtage géométrique. Près du seuil de percolation, on trouve que l'évolution de la conductance à l'échelle du pavé suit une loi puissance nouvelle. Loin du seuil, les résultats numériques ont été favorablement comparés avec une approximation de champ moyen. Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à l'impact de déformations élastiques. Un code de calcul fondé sur l'approximation de Boussinesq a été couplé à l'approche réseau. Les résultats indiquent un impact non négligeable des déformations élastiques sur les conductances.

Enfin, l'approche réseau a été adaptée pour simuler à l'aide d'un algorithme de percolation d'invasion le processus de drainage quasi-statique. Une bonne adéquation entre résultats numériques et expérimentaux a été obtenue.

mots clés : étanchéité - percolation - conductance électrique - conductance hydraulique - approximation de champ moyen - approximation de Boussinesq - drainage quasi-statique

Statistical study of static gasket conductance

Abstract

This work is motivated by tightness technological problems associated with metallic gasket. The objective is a better understanding of leakage mechanisms, through the development of new computational tools.

In this study, the aperture field between two rough surfaces in contact is described by a short correlated isotropic random Gaussian process. The system is studied as a set of independent elementary surfaces. Joint conductances are evaluated from a statistical study on those elementary surfaces. A computational code is developed using a network approach based on lubrication theory estimation of local conductances. The global conductance computation becomes analogous to an electrical problem for which the resistances are distributed on a random network. The network is built from the identification of the aperture field critical points. Maxima are linked through saddle points. Bond conductances are estimated at the aperture field's saddle points.

First, a purely plastic model of deformations is considered. Near percolation threshold the conductances display a power behaviour. Far from percolation threshold, numerical results are favourably compared with an effective medium approximation. Secondly, we study the impact of elastic deformations. A computational code based on Boussinesq approximation is coupled to the network approach. The results indicate a significant impact of elastic deformations on conductances.

Finally, the network approach is adapted to simulate quasi-static drainage thanks to a classical invasion percolation algorithm. A good comparison between previous experiments and numerical predictions is obtained.

key words : sealing - percolation - electrical conductance - hydraulic conductance - effective medium approximation - Boussinesq approximation - quasi-static drainage