

Cours de mécanique des fluides

Écoulements compressibles

IUT - GTE - Marseille

2011-12

Table des matières

1	Quelques rappels de thermodynamique	2
1.1	Premier principe de la thermodynamique ou principe de conservation de l'énergie . . .	2
1.2	Second principe de la thermodynamique ou principe d'évolution	2
1.3	Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits	3
2	Écoulement compressible ou incompressible ?	4
2.1	Vitesse du son et nombre de Mach	4
2.2	Limite de l'hypothèse d'incompressibilité	4
3	Écoulements isentropiques unidirectionnels compressibles de fluides parfaits	6
3.1	Hypothèses communes	6
3.2	Relation de Bernoulli II	6
3.3	Théorèmes d'Hugoniot	6
3.4	Équation de Barré de Saint-Venant	8
3.5	Relations entre deux sections droites	9
3.5.1	Relations isentropiques	9
3.5.2	Relations avec l'état générateur ou conditions d'arrêt	9
3.6	Notion d'état critique, conditions soniques	10
4	Ondes de choc	12
4.1	Généralités	12
4.1.1	Quelques exemples d'ondes de choc	12
4.1.2	Projectile P subsonique $u < c$	12
4.1.3	Projectile P supersonique $u > c$	12
4.2	Ondes de choc droites	13
4.2.1	Équations de base	13
4.2.2	Lois de compression de l'onde de choc droite	14
4.2.3	Relation de Prandtl	15
4.2.4	Calcul du rapport des grandeurs caractéristiques en fonction du nombre de Mach amont Ma_1	16
4.2.5	Variation d'entropie dans une onde de choc droite	17
4.2.6	Rendement isentropique à la traversée du choc	17
4.3	Ondes de choc obliques	17
5	Applications	20
5.1	Le tube de Pitot en écoulement compressible	20
5.1.1	Écoulement compressible subsonique	20
5.1.2	Écoulement compressible supersonique	20
5.2	Écoulements dans une tuyère	20
5.3	Souffleries subsoniques et supersoniques	22
6	Bibliographie	25

1 Quelques rappels de thermodynamique

1.1 Premier principe de la thermodynamique ou principe de conservation de l'énergie

Soit un **système matériel fermé** limité par une surface fermée au travers de laquelle ne s'effectuent que des échanges de travail et de chaleur. Si W et Q désignent le travail et la chaleur reçus par le système dans une transformation qui l'amène de l'état 1 à l'état 2, le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$E_{t2} - E_{t1} = (W + Q)_{1 \rightarrow 2} \quad (1)$$

où E_t désigne l'énergie totale du système qui se décompose ainsi : $E_t = U + E_c + E_p$, où U est l'énergie interne, E_c l'énergie cinétique et E_p l'énergie potentielle. E_p peut être associée aux forces de pesanteur, aux forces électrostatiques, aux forces électromagnétiques... Le travail W est celui des forces autres que celles qui dérivent d'un potentiel. Pour une transformation élémentaire (et par unité de masse du système) et en supposant que l'énergie potentielle est celle de la pesanteur, on peut alors écrire :

$$du + d(v^2/2) + gdz = \delta w + \delta q \quad (2)$$

Dans le cas d'un **système ouvert**, l'équation (2) devient :

$$\boxed{dh + d(v^2/2) + gdz = \delta w^* + \delta q} \quad (3)$$

où w^* désigne le travail autre que celui des forces de pression en entrée et en sortie du système et des forces qui dérivent d'un potentiel. $w^* = \int dP/\rho$ est appelé travail technique. Lorsqu'on considère des grandeurs par unité de masse, l'enthalpie h est reliée à l'énergie interne u par la relation : $h = u + p/\rho$.

Si on choisit convenablement le repère, c'est à dire de telle sorte que les parois soient fixes dans ce repère, alors $w^* = 0$. L'énergie potentielle étant presque toujours négligeable, si l'écoulement est adiabatique, on a alors :

$$dh + d(v^2/2) = 0 \Rightarrow h + v^2/2 = Cte \quad (4)$$

Cette somme est appelée "enthalpie totale". Elle se conserve même si l'écoulement est irréversible (avec frottement).

1.2 Second principe de la thermodynamique ou principe d'évolution

Le second principe de la thermodynamique peut s'énoncer ainsi :

1. il existe une fonction d'état extensive, appelée entropie et notée S . C'est une mesure du degré de désordre d'un système au niveau microscopique.
2. dans une transformation élémentaire, la variation d'entropie ds (par unité de masse) s'exprime comme la somme de la variation d'entropie $\delta_e s$ résultant des apports extérieurs et de la variation d'entropie $\delta_i s$ produite à l'intérieur du système.

Pour une transformation réelle, on a $\delta_i s \geq 0$. Lorsque $\delta_i s = 0$, la transformation est réversible.

Dans le cas d'un système fermé, on a : $\delta_e s = \delta Q/T$, ce qui donne pour le second principe :

$$\delta Q = Tds - T\delta_i s \quad (5)$$

À l'aide des deux premiers principes, on obtient :

$$du = Tds - Pd(1/\rho) \quad (6)$$

On peut en déduire également la définition de l'enthalpie :

$$\boxed{dh = Tds + dP/\rho} \quad (7)$$

Si l'écoulement est isentropique ($ds = 0$), on obtient la relation de Gibbs :

$$\boxed{dh = dP/\rho} \quad (8)$$

1.3 Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

L'équation d'état d'un gaz parfait (gaz idéal) est de la forme :

$$\boxed{P = \rho r T} \quad (9)$$

avec P , ρ et T la pression, la masse volumique et la température absolue du gaz. r est la constante du gaz considéré et s'exprime comme le rapport R/M entre la constante universelle des gaz parfaits $R = 8.3143 \text{ J/mol/K}$ et la masse molaire M du gaz étudié. Par exemple, pour l'air, $M = 28.964 \text{ g/mol}$ d'où $r = 287.06 \text{ J/kg/K}$. r s'exprime également en fonction des chaleurs massiques à pression c_p et volume c_v constants : $r = c_p - c_v$ (relation de Mayer). On note γ le rapport des chaleurs spécifiques : $\gamma = c_p/c_v$. On obtient ainsi :

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \quad c_v = \frac{r}{\gamma - 1} \quad (10)$$

Pour un gaz parfait, $du = c_v dT$ et $dh = c_p dT$. c_v n'est fonction que de T . Si c_v est indépendant de T , le gaz est caloriquement parfait. La relation (6) devient alors :

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{P}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (11)$$

$$\Rightarrow ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_v \frac{dT}{T} - r \frac{d\rho}{\rho} \quad (12)$$

En se servant de la différentielle logarithmique de l'équation d'état :

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (13)$$

on obtient ainsi :

$$ds = c_v \frac{dP}{P} - (c_v + r) \frac{d\rho}{\rho} \quad (14)$$

$$\Rightarrow ds = c_v \frac{dP}{P} - c_p \frac{d\rho}{\rho} = c_v \left(\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} \right) \quad (15)$$

Si la chaleur massique c_v est constante, on a après intégration :

$$s = c_v (\ln P - \gamma \ln \rho) + cte \quad (16)$$

$$\Rightarrow s = c_v \ln(P/\rho^\gamma) + cte \quad (17)$$

L'évolution isentropique d'un gaz parfait s'effectue donc à $\boxed{P/\rho^\gamma = Cte}$.

On peut retrouver facilement cette loi de Laplace en partant de la loi d'état des gaz parfaits en écriture différentielle :

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (18)$$

La variation d'enthalpie vaut : $dh = c_p dT = dP/\rho$. Ces deux relations donnent alors :

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{r dP}{c_p \rho r T} \quad (19)$$

Or $P = \rho r T$, $r = c_p - c_v$ et $\gamma = c_p/c_v$, d'où :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{P} \quad (20)$$

On retrouve ainsi :

$$\boxed{P/\rho^\gamma = Cte} \quad (21)$$

2 Écoulement compressible ou incompressible ?

2.1 Vitesse du son et nombre de Mach

Ce qui différencie un écoulement compressible d'un écoulement incompressible, c'est le fait que des petites variations de masse volumique, de pression et de vitesse se propagent à l'intérieur du fluide à une vitesse qui est la célérité du son dans le milieu considéré. Pour caractériser cette célérité, il faut considérer une petite perturbation adiabatique réversible (isentropique) qui se déplace dans le fluide initialement au repos contenu dans un tube de section A constante (Fig.1).

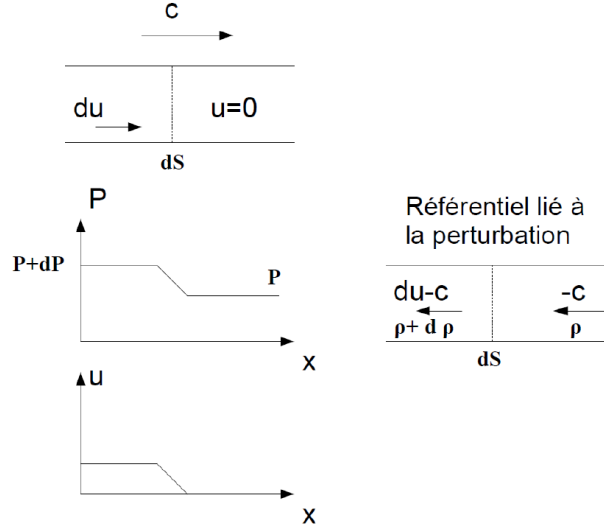


FIGURE 1 – Mise en évidence de la notion de célérité du son.

Dans un référentiel lié à la perturbation, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$-\rho c dS = (\rho + d\rho)(du - c)dS \quad (22)$$

$$\Rightarrow \rho c = (\rho + d\rho)(c - du) \quad (23)$$

Au premier ordre, cette équation donne : $\rho du = cd\rho$. De la même façon, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$(P + dP)dS - PdS = \rho c dS(c - (c - du)) = \rho c dS du \quad (24)$$

$$\Rightarrow dP = \rho c du \quad (25)$$

Ainsi, on obtient $c^2 d\rho = dP$. La perturbation considérée est isentropique, donc :

$$\boxed{c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s} \quad (26)$$

Pour une évolution isentropique d'un gaz parfait, on a : $P/\rho^\gamma = Cte$ et $P = \rho rT$ d'où :

$$c = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{\gamma rT}} \quad (27)$$

2.2 Limite de l'hypothèse d'incompressibilité

Dans quel cas peut-on négliger les variations de masse volumique au sein d'un écoulement ? On fait l'hypothèse d'écoulement isentropique (gradients de vitesse et de température suffisamment faibles). Dire que l'écoulement est incompressible, c'est dire que l'on peut négliger, pour une particule fluide, $div \vec{v}$ devant les gradients de vitesse qui la déforment :

$$o(\operatorname{div} \vec{v}) \ll o\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \frac{U}{L} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}\right| \ll \frac{U}{L} \quad (28)$$

On a :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad}} P \quad (29)$$

Le terme visqueux $\nu \Delta \vec{v}$ est ici nul puisque l'écoulement est isentropique, c'est à dire réversible (pas d'effet visqueux).

Cette équation (29) relie les variations de pression à celles de vitesse. Il faut également relier les variations de pression à celles de masse volumique. Pour un écoulement isentropique, on a déjà montré que :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{s=s_0} = c^2 \quad (30)$$

où c est la vitesse du son dans le milieu considéré. La condition d'incompressibilité s'écrit donc :

$$\left|\frac{1}{\rho c^2} \frac{dP}{dt}\right| \ll \frac{U}{L} \quad (31)$$

Si on appelle δP l'ordre de grandeur des variations de P et τ le temps caractéristique de ces variations pour une particule fluide que l'on suit. On obtient alors :

$$\frac{\delta P}{\rho c^2 \tau} \ll \frac{U}{L} \quad (32)$$

Pour un écoulement stationnaire, la relation (29) se simplifie :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad}} P \quad (33)$$

d'où :

$$o\left(\frac{U}{\tau}\right) = o\left(\frac{U^2}{L}\right) = o\left(\frac{\delta P}{\rho L}\right) \quad (34)$$

En reportant dans l'équation (32), on obtient la condition d'incompressibilité pour un écoulement stationnaire :

$$\boxed{Ma^2 = \left(\frac{U}{c}\right)^2 \ll 1} \quad (35)$$

où Ma est le **nombre de Mach**. Voici la classification adoptée suivant la valeur du nombre de Mach :

- $Ma < 0.3$: l'écoulement est **incompressible** et les effets de densité sont négligés. Dans l'air, un écoulement peut donc être supposé incompressible pour des vitesses allant jusqu'à $u \simeq 0.3c \simeq 100$ m/s.
- $0.3 < Ma < 0.8$: l'écoulement est **subsonique**. Les effets de densité sont importants mais il n'y a pas d'onde de choc.
- $0.8 < Ma < 1.2$: l'écoulement est **transonique**. Des ondes de choc apparaissent divisant l'écoulement en différentes régions subsoniques et supersoniques.
- $1.2 < Ma < 3$: l'écoulement est **supersonique**. Des ondes de chocs apparaissent et il n'y a pas de région subsonique.
- $3 < Ma$: l'écoulement est **hypersonique**. Les ondes de chocs et autres phénomènes sont particulièrement intenses.

Il est très difficile d'obtenir des écoulements soniques avec des liquides. Il faudrait des pressions de l'ordre de 10^3 atm. Par contre dans des gaz, un rapport de pressions de 2 suffit pour générer des vitesses soniques.

3 Écoulements isentropiques unidirectionnels compressibles de fluides parfaits

3.1 Hypothèses communes

1. Fluide non pesant : les problèmes à volume massique variable ne se posent pratiquement que pour les gaz à vitesse suffisamment élevée. Il est donc légitime de négliger les forces de gravité devant les forces de pression et les forces d'inertie.
2. Fluide parfait (non visqueux) : à grandes vitesses et fort cisaillement il est légitime de négliger les forces de viscosité devant les forces d'inertie : le nombre de Reynolds qui compare ces forces est généralement très grand. Le fluide est donc supposé tel que les contraintes de viscosité sont nulles. En fluide parfait, la vitesse est uniforme dans une section droite de l'écoulement, alors qu'en réalité, il existe un profil de vitesse, la vitesse étant nulle à la paroi et maximale au centre. Si le nombre de Reynolds est très grand, le profil est quadratique et peut être représenté par un profil "plat" de vitesse égale à la vitesse de débit. L'hypothèse du fluide parfait est là aussi justifiable.
3. Écoulement adiabatique : il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur ($Q = 0$). En effet, les échelles de temps des échanges thermiques sont beaucoup plus grandes que les échelles de temps des compressions. Les échanges de chaleur n'ont donc pas le temps de s'opérer.
4. Écoulement permanent : aucune grandeur physique ne dépend du temps.
5. Pas de réaction chimique.

L'écoulement est dit **isentropique** s'il est réversible et adiabatique. Un écoulement est réversible s'il n'y a pas d'onde de choc et si les forces de frottement sont négligeables.

Les écoulements isentropiques unidirectionnels compressibles de fluides parfaits se rencontrent notamment quand on envisage des écoulements dans des conduites ou des écoulements externes dans des tubes de courant élémentaires. On peut citer notamment le cas de la tuyère convergente-divergente sans onde de choc, ni transferts de chaleur ou frottements ou l'écoulement autour d'un profil d'aile d'avion en dehors de la couche limite.

3.2 Relation de Bernouilli II

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit le long d'une ligne de courant :

$$\delta w^* + \delta q = dh + d\left(\frac{u^2}{2}\right) + d(gz) \quad (36)$$

Le système étant isolé mécaniquement et thermiquement, on a : $\delta w^* = \delta q = 0$. On note H l'enthalpie totale. H est alors constante le long d'une ligne de courant ou partout si l'écoulement est irrotationnel :

$$H = h + \frac{u^2}{2} + gz = Cte \Leftrightarrow \boxed{d\left(h + \frac{u^2}{2} + gz\right) = 0} \quad (37)$$

On dit qu'un écoulement permanent adiabatique de gaz parfait est homoénergétique. Si le fluide est non pesant, on a de plus : $h + u^2/2 = Cte$. Cette relation est appelée également équation de Thomson ou formule de Zeuner.

3.3 Théorèmes d'Hugoniot

On suppose l'écoulement permanent et le fluide isentropique ($ds = 0$) et non pesant. Le volume de fluide pour lequel sont écrites les relations est limité par la paroi de la conduite entre deux sections proches (voir fig.2). A est l'aire d'une section.

On peut écrire les équations suivantes :

– Continuité :

$$\rho u A = Cte \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (38)$$

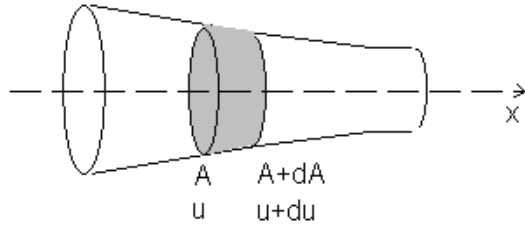


FIGURE 2 –

– Relation de Gibbs :

$$dh = \frac{dP}{\rho} \quad (39)$$

– Bernouilli II :

$$h + \frac{u^2}{2} = Cte \Rightarrow udu + dh = 0 \quad (40)$$

– Célérité du son :

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\gamma P}{\rho} = \gamma rT \quad (41)$$

– Équation d'Euler (ou de quantité de mouvement) :

$$udu + \frac{dP}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dP} \leq 0 \quad (42)$$

On remplace dP par $c^2 d\rho$ dans l'équation d'Euler (42) :

$$udu + c^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\left(\frac{u}{c}\right)^2 \frac{du}{u} \quad (43)$$

On élimine alors $d\rho/\rho$ en utilisant l'équation de continuité (38) :

$$-\frac{du}{u} - \frac{dA}{A} = -\left(\frac{u}{c}\right)^2 \frac{du}{u} \quad (44)$$

On introduit le nombre de Mach, $Ma = u/c$:

$$\boxed{\frac{du}{u}(1 - Ma^2) = -\frac{dA}{A}} \quad (45)$$

La relation (45) est appelée relation d'Hugoniot. À partir de cette relation d'Hugoniot (Eq.45) et de l'équation de quantité de mouvement (Eq.43), on en déduit :

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{1 - Ma^2} \left(\frac{\rho u^2}{P}\right) \frac{dA}{A} \quad (46)$$

Premier théorème d'Hugoniot : si l'écoulement est subsonique ($Ma < 1$), alors u et A varient en sens inverse l'un de l'autre dans un tube de courant (Fig.3a). En effet, $du/dP \leq 0$ montre que u et P varient en sens inverse. $1 - Ma^2 > 0$ entraîne que $du/dA < 0$. Ainsi, u et A varient en sens inverse. Pour $Ma \simeq 0$ (écoulements incompressibles), une diminution de la section produit une augmentation proportionnelle de la vitesse.

Deuxième théorème d'Hugoniot : si l'écoulement est supersonique ($Ma > 1$), alors $1 - Ma^2$ devient négatif. Ainsi u et A varient dans le même sens dans un tube de courant (Fig.3b).

Lorsque l'écoulement est supersonique, l'évolution de la vitesse diffère largement du cas incompressible. Aux vitesses supersoniques, la masse volumique diminue plus vite que la vitesse $d\rho/\rho = -Ma^2 du/u$, de telle sorte que la section doit augmenter pour assurer la conservation de la masse.

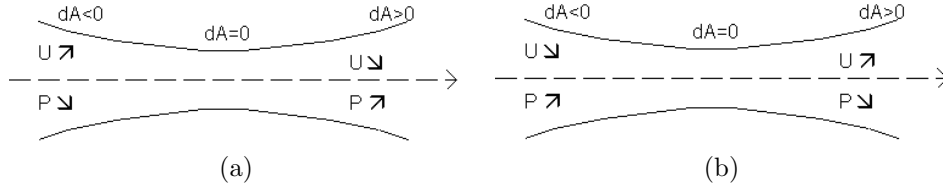


FIGURE 3 – (a) Écoulement subsonique $Ma < 1$, (b) Écoulement supersonique $Ma > 1$.

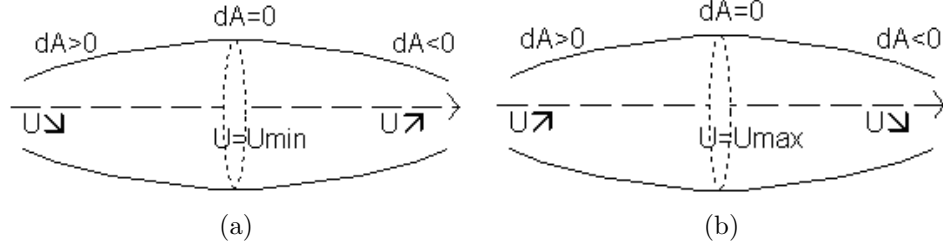


FIGURE 4 – (a) Écoulement subsonique $Ma < 1$, (b) Écoulement supersonique $Ma > 1$

Troisième théorème d'Hugoniot : la vitesse u de l'écoulement ne peut être égale à la célérité du son qu'en section d'aire minimale $dA = 0$. Il est, en effet, impossible d'obtenir la vitesse du son dans une aire de section maximale (Fig.4) car, pour $Ma < 1$ (resp. $Ma > 1$), la vitesse u est minimale (resp. maximale).

Pour passer d'un écoulement subsonique à un écoulement supersonique, il faut donc que la tuyère présente une section minimale appelée **col**. Dans le cas où la tuyère est amorcée, c'est à dire que l'écoulement est supersonique à un endroit, les conditions au col sont les conditions critiques. Dans ce cas, le débit de la tuyère ne dépend plus des conditions aval, l'onde de pression ne pouvant pas remonter l'écoulement supersonique. On parle d'un *phénomène d'étranglement*.

3.4 Équation de Barré de Saint-Venant

Elle s'applique aux processus irréversibles (non isentropiques). On utilise l'équation de Bernoulli Π ($H = u^2/2 + h = Cte$) et la définition de l'enthalpie pour un gaz idéal ($h = c_p T + Cte$). On obtient alors :

$$\frac{u^2}{2} + c_p T = Cte \quad (47)$$

En utilisant $c_p = \gamma r / (\gamma - 1)$ et $c^2 = \gamma r T$, on obtient la deuxième forme de l'équation de Barré de Saint-Venant :

$$\boxed{u^2/2 + c^2/(\gamma - 1) = Cte} \quad (48)$$

Comme $c^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$, on a alors la troisième forme de l'équation de Barré de Saint-Venant :

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} = Cte \quad (49)$$

L'équation (49) reste néanmoins valable pour des écoulements adiabatiques réversibles (isentropiques).

3.5 Relations entre deux sections droites

3.5.1 Relations isentropiques

On connaît une section de référence notée avec l'indice r (ρ_r, P_r, T_r). La loi de compression isentropique (Eq.21) ou loi de Laplace donne :

$$\frac{\rho}{\rho_r} = \left(\frac{P}{P_r}\right)^{1/\gamma} \quad (50)$$

Avec la loi d'état $P = \rho r T$, on obtient :

$$\frac{T}{T_r} = \left(\frac{P}{P_r}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \quad (51)$$

$$\frac{\rho}{\rho_r} = \left(\frac{T}{T_r}\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (52)$$

3.5.2 Relations avec l'état générateur ou conditions d'arrêt

L'état générateur dont les caractéristiques sont notées ρ_0, P_0, T_0 et u_0 , est le réservoir haute pression ou la chambre de combustion d'un réacteur, tel que $u_0 \simeq 0$. La condition d'arrêt correspond au point particulier de la paroi où les lignes de courant se séparent, dit point d'arrêt, pour lequel la vitesse est nulle.

L'écoulement est adiabatique non pesant. On utilise donc l'équation de Barré de Saint-Venant :

$$\frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{u_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} = \frac{c_0^2}{\gamma-1} \quad (53)$$

On multiplie alors tout par $(\gamma-1)/c_0^2$, et il vient :

$$\boxed{\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{-1}} \quad (54)$$

soit avec $c^2 = \gamma r T$ et $c_0^2 = \gamma r T_0$:

$$\boxed{\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{-1}} \quad (55)$$

En utilisant les relations isentropiques, on obtient :

$$\boxed{\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}} \quad (56)$$

$$\boxed{\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/(\gamma-1)} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{-1/(\gamma-1)}} \quad (57)$$

On rappelle que : $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + O(x^3)$. En posant $x = (\gamma-1)Ma^2/\gamma$ et $n = \gamma/(\gamma-1)$, on obtient :

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{\gamma}{2} Ma^2 + \frac{\gamma}{8} Ma^4 + O(Ma^6) \quad (58)$$

en multipliant par P et en factorisant par $\frac{\gamma}{2} Ma^2$, on obtient :

$$P_0 - P = \frac{1}{2} P \gamma Ma^2 \left(1 + \frac{Ma^2}{4} + O(Ma^4)\right) \quad (59)$$

or :

$$\frac{1}{2} P \gamma Ma^2 = \frac{1}{2} P \gamma \frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{P \gamma}{\gamma r T} u^2 = \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (60)$$

d'où :

$$P_0 - P = \frac{1}{2} \rho u^2 \left(1 + \frac{Ma^2}{4} + O(Ma^4)\right) \quad (61)$$

L'équation de Bernoulli se présente donc comme un développement au premier ordre de l'équation de Barré de Saint Venant avec un coefficient d'erreur égal à $Ma^2/4$ qui vaut 1% pour $Ma = 0.2$ et 6% pour $Ma = 0.5$.

On peut exprimer également le débit massique $q_m = \rho u A$ en fonction du nombre de Mach, de la section A et des conditions d'arrêt. En substituant $\rho = P/(rT)$ et $u = cMa = Ma\sqrt{\gamma rT}$, q_m devient :

$$q_m = APMa\left(\frac{\gamma}{rT}\right)^{1/2} \quad (62)$$

On fait apparaître les rapports P_0/P et T_0/T :

$$q_m = AP_0Ma\left(\frac{P}{P_0}\right)\left(\frac{\gamma}{rT_0}\right)^{1/2}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/2} \quad (63)$$

En utilisant les relations (55) et (56), on obtient finalement :

$$q_m = AP_0Ma\left(\frac{\gamma}{rT_0}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{(\gamma+1)/[2(1-\gamma)]} \quad (64)$$

Il est à noter qu'il existe une vitesse maximale pour l'écoulement. Si on effectue une détente du gaz depuis le réservoir jusqu'au vide ($P = 0$), ce qui entraîne $T = 0$, on obtient d'après l'équation (49) de Barré de Saint-Venant :

$$u_{max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{2c_p T_0} = \sqrt{2h_0} = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (65)$$

Cette vitesse maximale u_{max} ne dépend que des conditions régnant dans l'état générateur. Elle ne peut être atteinte que pour une détente isentropique. u_{max} varie comme \sqrt{T} (u_{max} peut donc atteindre plusieurs km/s pour des bouches à feu) et comme $1/\sqrt{\rho}$. Ainsi, à T donnée, u_{max} est 4 fois plus grande pour l'hydrogène que pour l'air. Par exemple, pour de l'air ($\gamma = 1.405$) à $T = 288,15K$, $c_0 = 340 m/s$ et $u_{max} = 756 m/s$.

Cette vitesse est intéressante à plusieurs titres : elle est la vitesse maximale que peuvent atteindre les gaz d'échappement d'une fusée dans le vide, elle conditionne donc la poussée maximale des moteurs de fusée. D'autre part, d'un point de vue de la théorie cinétique des gaz, cette vitesse représente la vitesse désordonnée des molécules dans le gaz. En effet, lorsque l'on détend le gaz sans perte d'énergie jusqu'à une pression et température nulles, l'énergie cinétique des molécules l'une par rapport à l'autre devient alors nulle. L'énergie cinétique de l'ensemble des molécules fixes l'une par rapport à l'autre est égale à l'énergie avant la détente donc à l'énergie cinétique désordonnée des molécules dans le gaz (hypothèse de gaz parfait).

3.6 Notion d'état critique, conditions soniques

On considère un conduit dans lequel la vitesse u augmente continuellement à partir d'une valeur très faible pour devenir supersonique. Le conduit doit d'abord converger dans la région subsonique puis diverger dans la région supersonique. Lorsque le nombre de Mach atteint la valeur 1, le conduit doit présenter un col. $Ma = 1$ ne peut être atteint que dans un col mais le nombre de Mach n'est pas nécessairement égal à 1 au col. Si $Ma \neq 1$ au col, alors $du/u = 0$ et la vitesse possède donc un extremum en ce point qui est un maximum si l'écoulement est subsonique ou un minimum si l'écoulement est supersonique.

Le point de l'écoulement où $Ma = 1$ ($u = c$) est appelé point critique. Les caractéristiques du fluide en ce point sont appelées caractéristiques critiques et sont notées c^* , ρ^* , P^* , T^* , A^* . On peut les calculer à partir de l'état générateur supposé connu ou des conditions d'arrêt. Il est à noter que, pour $Ma = 1$, la variation relative de vitesse ne peut rester finie que si $dA/A = 0$ d'après la relation d'Hugoniot (Eq.45). On obtient alors :

– Vitesse du son :

$$\left(\frac{c^*}{c_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{1+\gamma} \quad (66)$$

soit $c^*/c_0 = 0.9119$ pour l'air ($\gamma = 1.405$).

– Température :

$$\frac{T^*}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{1+\gamma} \quad (67)$$

soit $T^*/T_0 = 0.8316$ pour l'air.

– Pression :

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} = \left(\frac{2}{1+\gamma}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (68)$$

soit $P^*/P_0 = 0.5274$ pour l'air.

– Masse volumique :

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)^{-1/(\gamma-1)} = \left(\frac{2}{1+\gamma}\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (69)$$

soit $\rho^*/\rho_0 = 0.6342$ pour l'air.

On peut également donner l'expression du rapport entre la section et la section au col sonique en fonction du nombre de Mach Ma :

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \left[\frac{2}{1+\gamma} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma-2}} \quad (70)$$

La figure 5 représente les variations de A/A^* en fonction de Ma pour trois gaz. A^* est la section critique : elle correspond à la section du col lorsque la tuyère est amorcée. La relation (70) possède un minimum en $Ma = 1$. Pour un écoulement isentropique donné, la section critique est minimum.

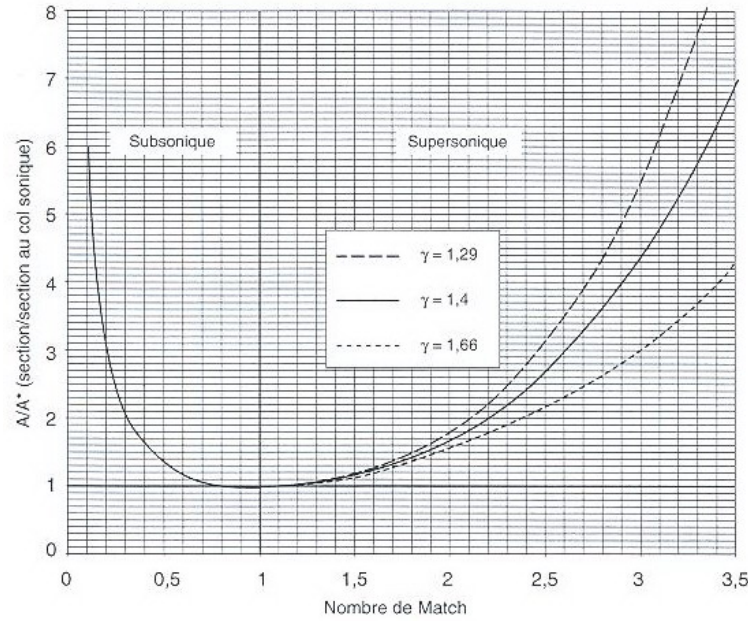


FIGURE 5 – Nombre de Mach en fonction de la section pour l'écoulement isentropique en tuyère pour trois gaz : air ou azote ($\gamma = 1.4$), dioxyde de carbone ($\gamma = 1.29$), hélium ou argon ($\gamma = 1.66$), d'après Viollet (1997).

On peut également calculer le débit d'étranglement q_{m_e} :

$$q_{m_e} = \rho^* A^* u^* = \rho_0 A^* c_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (71)$$

Ce débit d'étranglement ne dépend plus que des conditions génératrices et de la section du col. Cette caractéristique est utilisée pour les réacteurs ou les fusées pour réguler leur fonctionnement. Le retour en écoulement subsonique ne peut s'effectuer que par un col, ou qu'on nous allons le voir plus loin, par une onde de choc. L'évolution du débit massique en fonction du rapport ρ/ρ_0 est donnée à la Figure 6.

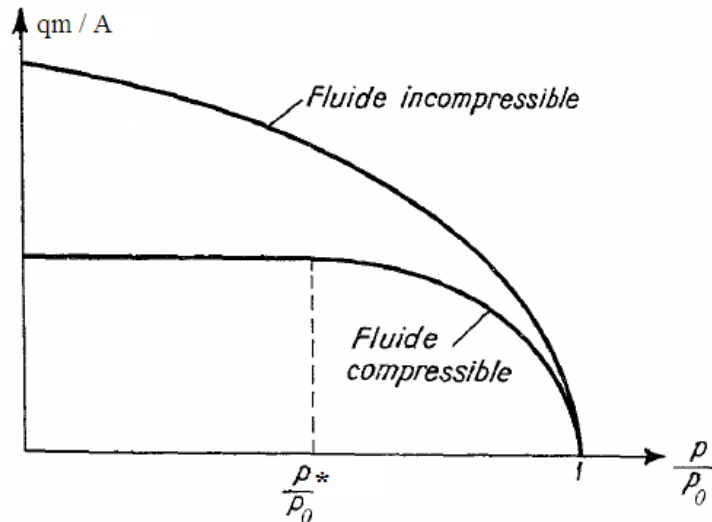


FIGURE 6 – Vitesse moyenne de l'écoulement en fonction du rapport de masses volumiques ρ/ρ_0 . Comparaison entre fluide incompressible et fluide compressible.

4 Ondes de choc

4.1 Généralités

4.1.1 Quelques exemples d'ondes de choc

De nombreuses expériences (Fig.7a-d) montrent que les écoulements compressibles à grande vitesse peuvent subir des variations très rapides de leurs caractéristiques sur des distances très faibles. On peut citer notamment les ondes de détonation accompagnant les explosions ou le bang produit par un avion en vol supersonique.

Pour expliquer le rôle de la célérité du son, prenons l'exemple d'un projectile dans un milieu au repos (Fig.8).

4.1.2 Projectile P subsonique $u < c$

Au bout d'un temps δt , le projectile a parcouru $U\delta t$, alors que l'onde sonore a parcouru $c\delta t$ (Fig.8a). La perturbation sonore créée en un point n'est jamais superposée à la perturbation créée en un autre point. Le projectile est précédé par les ondes sonores qui produisent des déformations anticipant l'approche de l'obstacle.

4.1.3 Projectile P supersonique $u > c$

Les ondes sphériques sont inscrites dans un cône enveloppe (Fig.8b). La zone extérieure au cône est une zone de silence. Les ondes sont reçues dans l'ordre inverse de l'ordre d'émission. Les ondes de compression se concentrent sur ce cône appelé cône de Mach. Le demi-angle au sommet μ est appelé angle de Mach et $\sin \mu = c/u = 1/Ma$.

Les particules de fluide ne peuvent subir aucune adaptation avant de recevoir le projectile. En conséquence, elles subissent de façon discontinue une brusque variation de vitesse, c'est le phénomène de choc. Il y a une brutale discontinuité de vitesse, de pression, de température et de masse volumique. Cela s'accompagne d'une dégradation de l'énergie et l'entropie augmente.

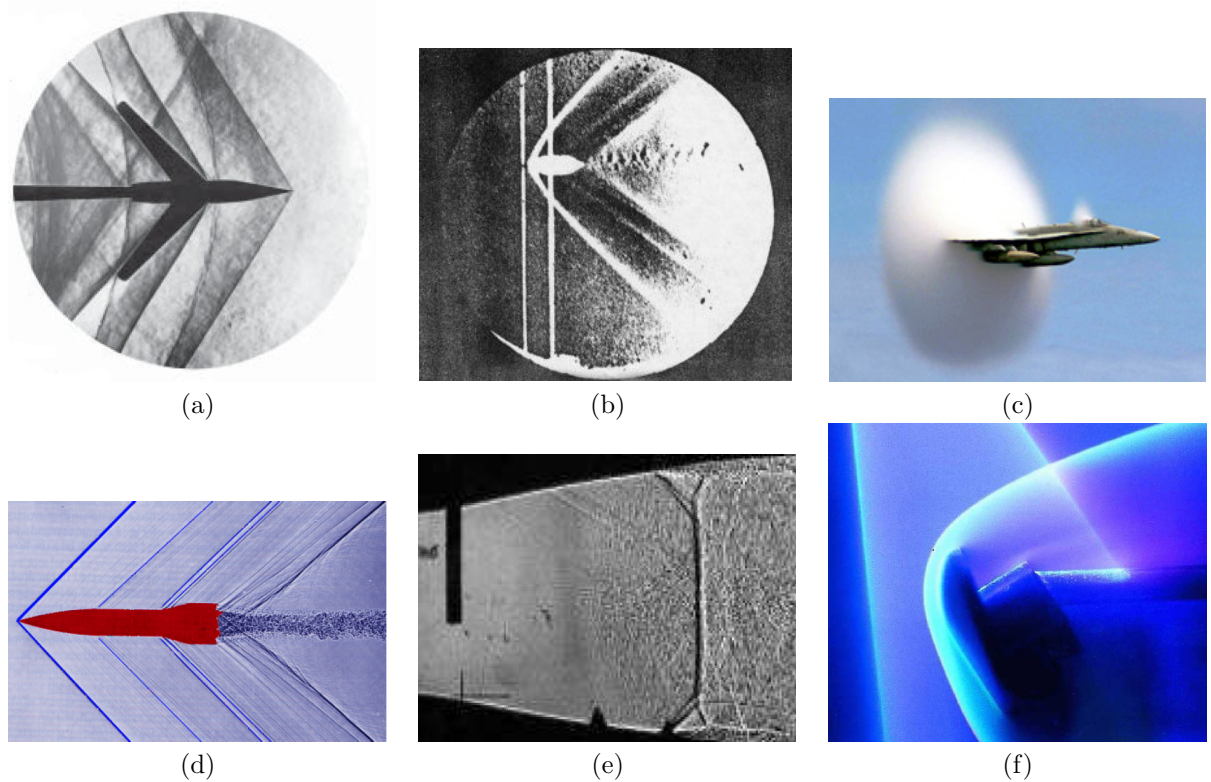


FIGURE 7 – (a) Photo Schlieren d’une onde de choc attachée sur un corps supersonique à $Ma = 1.2$ (NASA, 1995); (b) Ombrographe d’une onde de choc détachée en amont d’une balle animée d’une vitesse supersonique (E. Mach, 1887); (c) Ondes de choc coniques sur un Jet fighter rendues visibles à cause de la condensation (Source : American Forces Information Service); (d) Ondes de choc obliques autour d’une maquette de fusée; (e) Visualisation d’un choc droit à la sortie d’une tuyère de Laval; (f) Simulation en soufflerie de l’entrée dans l’atmosphère martienne du futur orbiteur de la mission “retour d’échantillons martien” (ONERA).

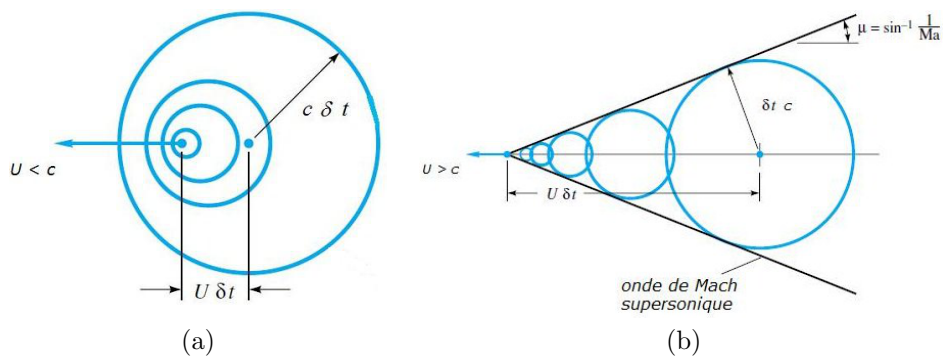


FIGURE 8 – (a) Projectile subsonique $Ma < 1$, (b) Projectile supersonique $Ma > 1$

4.2 Ondes de choc droites

4.2.1 Équations de base

On peut négliger l’épaisseur de l’onde de choc. On considère deux sections droites, immédiatement avant et après le choc (Fig.9), de telle sorte que $A_1 = A_2 = A$.

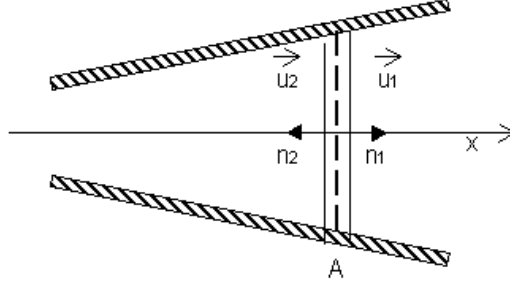


FIGURE 9 –

On peut écrire la conservation de la masse :

$$q_m = \rho_1 A_1 u_1 = \rho_2 A_2 u_2 \Rightarrow \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (72)$$

On applique le théorème d'Euler au système matériel formé par l'onde :

$$\rho_2 A_2 u_2^2 - \rho_1 A_1 u_1^2 = -(P_2 A_2 - P_1 A_1) \Rightarrow P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (73)$$

L'écoulement étant adiabatique et irréversible (donc pas isentropique), on applique une des relations de Barré de Saint-Venant :

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = Cte \Rightarrow \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2}{\rho_2} \quad (74)$$

L'équation d'état s'écrit :

$$P = \rho r T \Rightarrow \frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} \quad (75)$$

Toutes ces équations de base vont permettre de déterminer toutes les relations entre les grandeurs immédiatement en amont et en aval du choc.

4.2.2 Lois de compression de l'onde de choc droite

On peut établir les relations liant les rapports des grandeurs d'état à la traversée de l'onde de choc droite en utilisant les relations précédentes. On injecte l'équation (72) de conservation de la masse dans l'équation d'Euler (73) :

$$\rho_1 u_1 (u_2 - u_1) = P_1 - P_2 \quad (76)$$

On multiplie l'équation (76) par $(u_1 + u_2)/(\rho_1 u_1)$ et avec $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$:

$$u_2^2 - u_1^2 = (P_1 - P_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (77)$$

L'équation de Barré de Saint-Venant (74) donne alors, compte-tenu de ce résultat :

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) = \frac{1}{2} (P_1 - P_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (78)$$

La deuxième égalité relie les grandeurs d'état P_2 et ρ_2 à P_1 et ρ_1 . On en déduit les relations d'Hugoniot pour l'onde de choc droite :

$$\boxed{P_2/P_1 = (1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1}) / (\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1})} \quad (79)$$

$$\boxed{\rho_2/\rho_1 = (1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{P_2}{P_1}) / (\frac{P_2}{P_1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1})} \quad (80)$$

$$\boxed{T_2/T_1 = (\frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}) / (\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1})} \quad (81)$$

$$\boxed{T_2/T_1 = \left(\frac{P_2}{P_1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) / \left(\frac{P_1}{P_2} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)} \quad (82)$$

Ces relations d'Hugoniot sont des lois de compression de l'onde de choc droite valables à la traversée du choc.

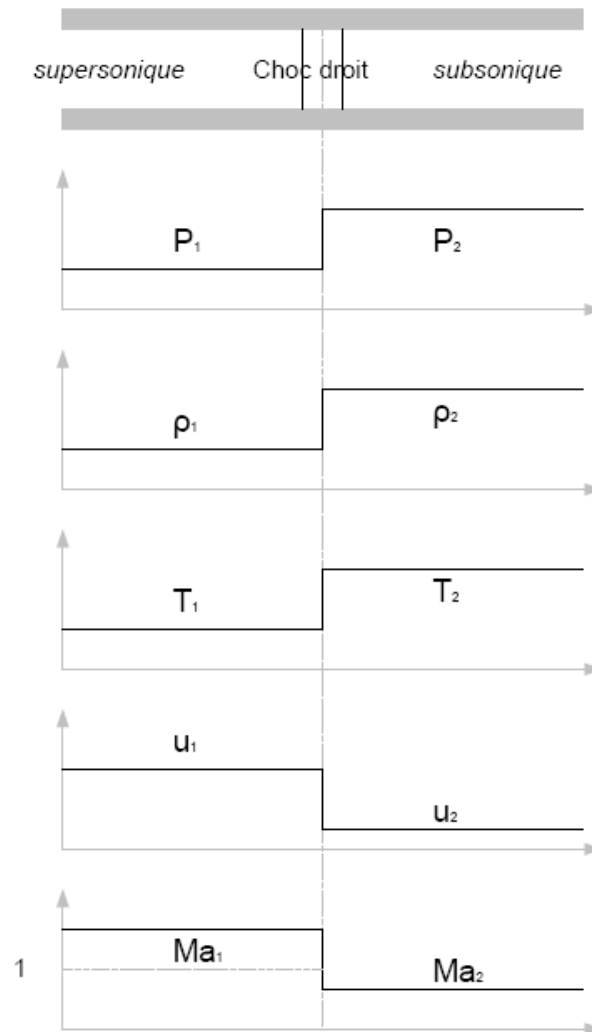


FIGURE 10 – Variations des grandeurs caractéristiques de l'écoulement à travers une onde de choc droite.

La figure 10 présente les variations des grandeurs caractéristiques P, T, ρ, u, Ma de l'écoulement de l'amont (indice 1) vers l'aval (indice 2) à travers une onde de choc droite.

Remarque : pour un même rapport ρ_1/ρ_2 , le rapport P_1/P_2 croît plus vite à la traversée du choc que pour une compression isentropique, ce qui entraîne une augmentation plus rapide de la température. En effet, on a la relation d'Hugoniot (82) pour un choc droit au lieu de $T_2/T_1 = (P_2/P_1)^{(\gamma-1)/\gamma}$ dans le cas isentropique.

4.2.3 Relation de Prandtl

La relation de Prandtl établit la relation entre les vitesses en amont et en aval du choc. Dans un premier temps, l'équation d'Euler donne :

$$u_2 - u_1 = \frac{P_1}{\rho_1 u_1} - \frac{P_2}{\rho_2 u_2} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma P_1}{\rho_1 u_1} - \frac{\gamma P_2}{\rho_2 u_2} \right) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{c_1^2}{u_1} - \frac{c_2^2}{u_2} \right) \quad (83)$$

La troisième relation (Eq.49) de Barré de Saint-Venant entre les sections (1) en amont du choc, (2) en aval du choc et (*) au niveau du choc s'écrit :

$$c_1^2 + \frac{\gamma-1}{2}u_1^2 = c_2^2 + \frac{\gamma-1}{2}u_2^2 = c_*^2 \frac{\gamma+1}{2} \quad (84)$$

On introduit l'équation (84) dans l'équation (83) :

$$\gamma(u_2 - u_1) = \frac{c_2^2}{u_1} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_2^2 - u_1^2}{u_1} - \frac{c_2^2}{u_2} \quad (85)$$

$$\Rightarrow \gamma(u_2 - u_1)u_1 = c_2^2 + \frac{\gamma-1}{2}(u_2^2 - u_1^2) - \frac{c_2^2 u_1}{u_2} \quad (86)$$

$$\Rightarrow \gamma(u_2 - u_1)u_1 = c_2^2 \frac{u_2 - u_1}{u_2} + \frac{\gamma-1}{2}(u_2 - u_1)(u_2 + u_1) \quad (87)$$

$$\Rightarrow \gamma u_1 = \frac{c_2^2}{u_2} + \frac{\gamma-1}{2}(u_2 + u_1) \quad (88)$$

$$\Rightarrow \gamma u_1 u_2 = c_2^2 + \frac{\gamma-1}{2}u_2^2 + \frac{\gamma-1}{2}u_1 u_2 \quad (89)$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma+1}{2}u_1 u_2 = \frac{\gamma+1}{2}c_*^2 \quad (90)$$

On obtient finalement la **relation de Prandtl** :

$$\boxed{u_1 u_2 = c_*^2} \quad (91)$$

4.2.4 Calcul du rapport des grandeurs caractéristiques en fonction du nombre de Mach amont Ma_1

D'après l'équation de continuité, on peut en déduire le rapport ρ_2/ρ_1 :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{c_*^2} = \frac{u_1^2}{\frac{2}{\gamma+1}(c_1^2 + \frac{\gamma-1}{2}u_1^2)} \quad (92)$$

D'où :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}Ma_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma_1^2} \quad (93)$$

On peut faire de même par rapport à Ma_2 :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}Ma_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma_2^2} \quad (94)$$

On peut exprimer le rapport des pressions :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = \frac{2\gamma Ma_1^2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (95)$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_2^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (96)$$

On peut exprimer également le rapport des températures :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\gamma-1)^2}{(\gamma+1)^2} \left(\frac{4\gamma}{(\gamma-1)^2} - 1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} Ma_1^2 - \frac{2}{(\gamma-1)Ma_1^2} \right) \quad (97)$$

On exprime Ma_1 et Ma_2 en fonction du rapport des pressions :

$$Ma_1^2 = 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) \quad (98)$$

$$Ma_2^2 = 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{P_1}{P_2} - 1 \right) \quad (99)$$

Il faut que $P_2/P_1 > 1$ pour que $Ma_1 > 1$. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante pour qu'il y ait un choc. Si $Ma_1 < 1$, il ne peut pas y avoir de choc.

On peut exprimer Ma_1 en fonction de Ma_2 :

$$\frac{2\gamma}{\gamma+1}Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{1}{\frac{2\gamma}{\gamma+1}Ma_2^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \quad (100)$$

$$\Rightarrow Ma_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma_1^2}{\gamma Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \quad (101)$$

Si le choc existe et que $Ma_1 > 1$, alors Ma_2 est toujours inférieur à 1. Il est à noter qu'on ne peut pas utiliser la relation $P/\rho^\gamma = Cte$ à la traversée du choc car le phénomène est irréversible.

4.2.5 Variation d'entropie dans une onde de choc droite

L'entropie s augmente à la traversée du choc d'après la relation de Gibbs : $ds = dh/T - dP/\rho$. Ainsi :

$$ds = (c_p - r)\frac{dT}{T} - r\frac{d\rho}{\rho} = c_v\frac{dT}{T} - r\frac{d\rho}{\rho} \quad (102)$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{c_v} = \frac{dP}{P} - \gamma\frac{d\rho}{\rho} \quad (103)$$

$$\Rightarrow s_2 - s_1 = c_v \ln\left[\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma\right] \quad (104)$$

$$\Rightarrow s_2 - s_1 = c_v \ln\left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(\frac{1 + (\gamma-1)Ma_1^2/2}{(\gamma+1)Ma_1/2}\right)^\gamma\right] \quad (105)$$

Si $Ma_1 \leq 1.2$, $s_2 - s_1$ est très faible. Ensuite, $s_2 - s_1$ augmente fortement avec Ma_1 .

Remarque : Si $Ma_1 < 1$, il n'y a pas de choc. Cela entraînerait en effet que $s_2 - s_1 < 0$, ce qui n'a pas de signification physique. L'onde de choc droite ne peut donc exister que si $Ma_1 > 1$.

4.2.6 Rendement isentropique à la traversée du choc

Le rendement isentropique, qui compare la transformation réelle à une transformation isentropique, est défini, comme pour les machines irréversibles, par :

$$\eta_{is} = \frac{h_2^{is} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{T_2^{is} - T_1}{T_2 - T_1} \quad (106)$$

$$\frac{T_2^{is}}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (107)$$

Si $P_2/P_1 \leq 2.7$, $Ma_1 = 1.5$ et $\eta_{is} = 0.9$. De même, si $P_2/P_1 \leq 4.5$, $Ma_1 = 2$ et $\eta_{is} = 0.8$. Au-delà le rendement isentropique devient très faible. L'onde de choc droite est donc très dissipative au-delà de $Ma_1 = 2$ (Fig.11). Il est alors préférable de recourir à des ondes de choc obliques.

4.3 Ondes de choc obliques

On considère un écoulement supersonique à travers une onde de choc oblique d'angle β par rapport à la direction horizontale (Fig.12).

Il y a conservation du débit massique à la traversée de l'onde de choc. La masse traversant l'onde de choc pendant le temps dt est :

$$dm = -\rho_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1)dt = \rho_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2)dt \Rightarrow \rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n} \quad (108)$$

où l'indice n correspond à la composante de la vitesse normale à l'onde de choc.

L'équation d'Euler s'écrit :

$$\int_S \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n})dS = - \int_S P \vec{n}dS \Rightarrow \rho_2 \vec{u}_2 u_{2n} A_2 - \rho_1 \vec{u}_1 u_{1n} A_1 = -P_1 \vec{n}_1 A_1 - P_2 \vec{n}_2 A_2 \quad (109)$$

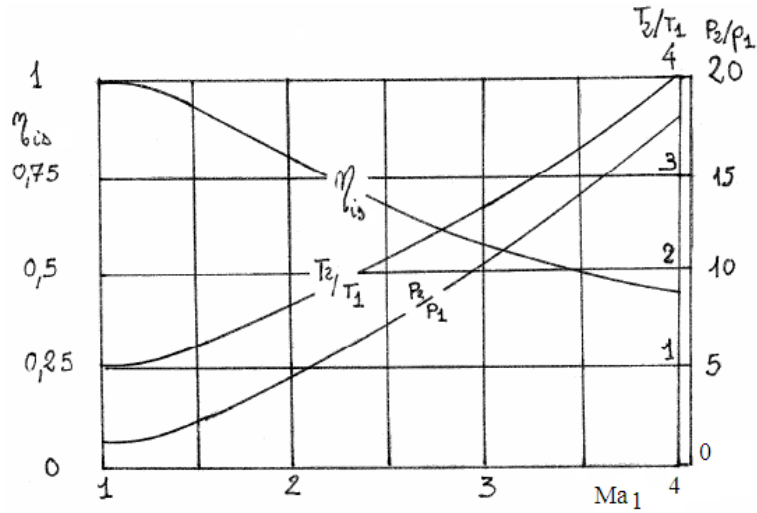


FIGURE 11 – Rendement isentropique en fonction du nombre de Mach amont.

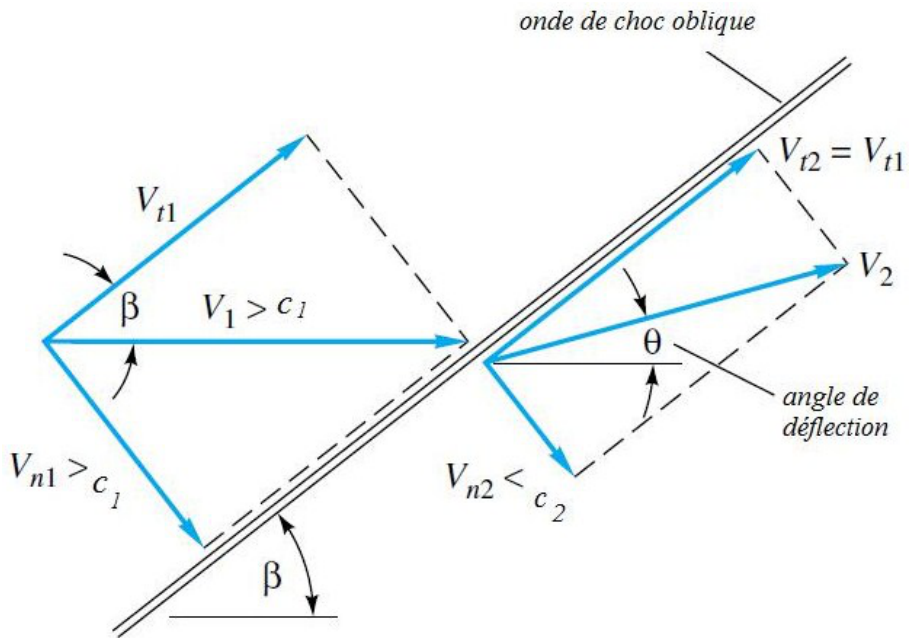


FIGURE 12 – Géométrie de l'écoulement à travers une onde de choc oblique.

Or $A_1 = A_2 = A$ et si l'on note $D_m = \rho_2 u_{2n} A_2 = \rho_1 u_{1n} A_1$, le débit massique qui traverse l'onde de choc s'écrit alors :

$$D_m(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) = (P_1 - P_2)\vec{n}_2 A \quad (110)$$

soit en projection sur l'onde de choc :

$$D_m(u_{2t} - u_{1t}) = 0 \Rightarrow \boxed{u_{1t} = u_{2t}} \quad (111)$$

Le plan d'onde est donc perpendiculaire au vecteur $\vec{u}_2 - \vec{u}_1$. Si on projette sur la normale au plan d'onde, il vient :

$$\boxed{\rho_1 u_{1n}^2 + P_1 = \rho_2 u_{2n}^2 + P_2} \quad (112)$$

L'équation de Barré de Saint-Venant s'écrit alors :

$$\frac{u_1^2}{2} + c_p T_1 = \frac{u_2^2}{2} + c_p T_2 \quad (113)$$

$$\Rightarrow \frac{u_{1n}^2 + u_{1t}^2}{2} + c_p T_1 = \frac{u_{2n}^2 + u_{2t}^2}{2} + c_p T_2 \quad (114)$$

$$\boxed{u_{1n}^2/2 + c_p T_1 = u_{2n}^2/2 + c_p T_2} \quad (115)$$

Les équations choc droit - choc oblique s'écrivent de la même façon. Dans les deux cas, la vitesse est la vitesse normale au choc. Toutes les relations établies pour le choc droit seront utilisables pour traverser le choc oblique simplement en remplaçant u_1 par u_{1n} , u_2 par u_{2n} , $Ma_1 = u_1/c_1$ par $Ma_{1n} = u_{1n}/c_1 = Ma_1 \sin \beta$ et $Ma_2 = u_2/c_2$ par $Ma_{2n} = u_{2n}/c_2 = Ma_2 \sin(\beta - \theta)$.

Par rapport au choc droit, le taux de compression P_2/P_1 et l'augmentation d'entropie $s_2 - s_1$ sont plus faibles.

5 Applications

5.1 Le tube de Pitot en écoulement compressible

5.1.1 Écoulement compressible subsonique

Le capteur donne la température d'arrêt T_0 , la pression d'arrêt P_0 et la pression statique P_{st} . L'équation de Barré de Saint-Venant donne :

$$u^2 = 2c_p(T_0 - T_{st}) \quad (116)$$

L'écoulement étant isentropique, on a :

$$\frac{T_{st}}{T_0} = \left(\frac{P_{st}}{P_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \quad (117)$$

On en déduit l'expression de la vitesse mesurée :

$$u = \sqrt{2c_p T_0 \left(1 - \left(\frac{P_{st}}{P_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right)} \quad (118)$$

5.1.2 Écoulement compressible supersonique

Une onde de choc assimilée à un choc droit est située en amont du capteur. Le capteur donne la température d'arrêt T_0 , la pression d'arrêt P_0 et la pression statique en aval du choc P_2 . L'écoulement est isentropique entre l'aval du choc et le point d'arrêt, d'où :

$$u_2 = \sqrt{2c_p T_0 \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right)} \quad (119)$$

La température est donnée par : $T_2 = T_0 \left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$. On en déduit le nombre de Mach en aval du choc : $Ma_2 = u_2 / \sqrt{\gamma r T_2}$ puis la vitesse critique :

$$c_*^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_2^2 + 2 \frac{\gamma r}{\gamma+1} T_2 \quad (120)$$

La vitesse en amont du choc est déduite de la relation de Prandtl (91) :

$$u_1 = \frac{c_*^2}{u_2} \quad (121)$$

5.2 Écoulements dans une tuyère

On considère une tuyère convergente-divergente dite de Laval à géométrie fixée (Fig.13). On admet que l'écoulement est adiabatique et que les frottements sont négligeables. Des ondes de choc peuvent apparaître. Celles-ci ne sont pas strictement droites car l'écoulement n'est lui-même pas strictement unidimensionnel. On peut considérer que les chocs sont droits si la variation de section de la tuyère n'est pas trop rapide et si l'épaisseur des couches limites est faible par rapport au diamètre.

On peut distinguer quatre régimes d'écoulement (Fig.13-14) :

- Régime 1 (courbes (a), (b), Fig.13-14) : l'ensemble de l'écoulement est subsonique et la tuyère fonctionne comme un Venturi. Les gaz sont accélérés dans le convergent puis leur vitesse diminue dans le divergent. La section au col est supérieure à la section critique. Le rapport P/P_i passe par un minimum au col. La limite du régime 1 est atteinte lorsque pour une pression de sortie ou d'éjection P_e suffisamment faible, la pression au col devient égale à la pression critique (courbe (c) sur la fig.13). L'écoulement est subsonique de part et d'autre du col et est sonique au col.
- Régime 2 (courbe (d), Fig.7e,13,14) : les conditions critiques sont atteintes au col. L'écoulement devient supersonique dans une partie du divergent. Un choc droit apparaît en aval du col et produit une recompression accompagnée d'une décélération de l'écoulement. En aval du choc, l'écoulement est à nouveau subsonique, le nombre de Mach diminue jusqu'à la section d'éjection

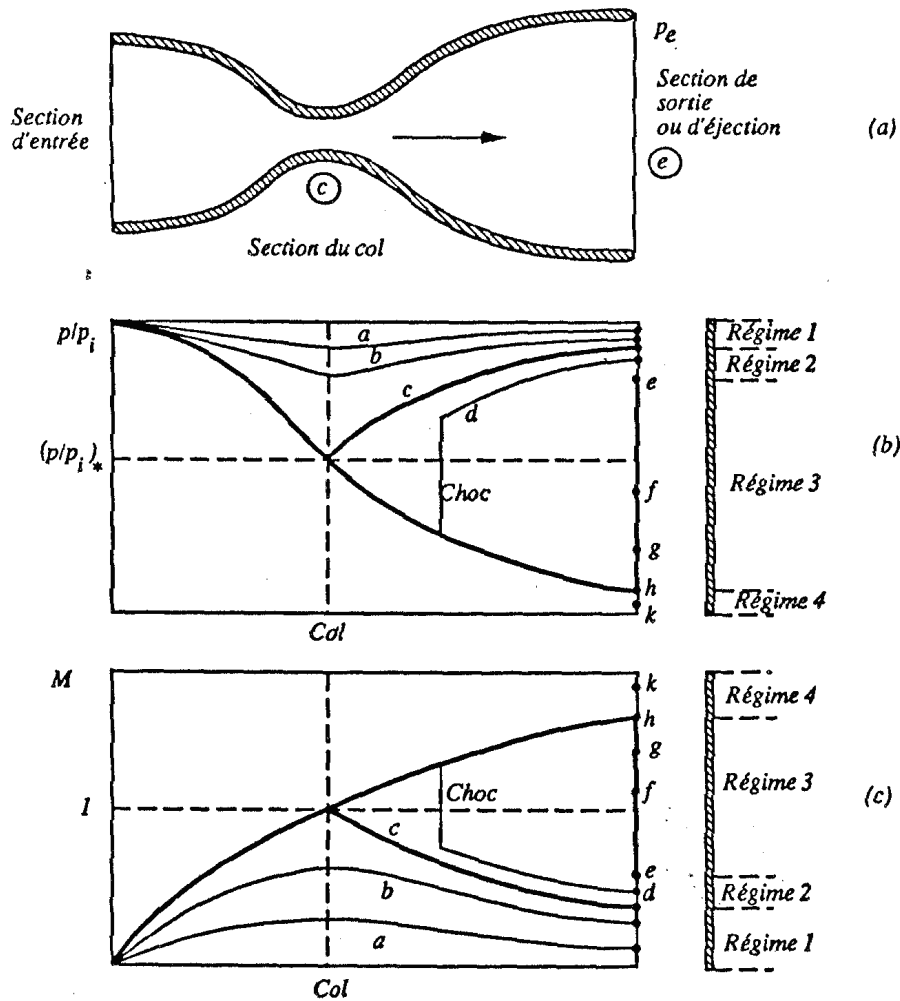


FIGURE 13 – Régimes d'écoulement dans une tuyère de Laval d'après Candel (1995), avec P_i la pression d'arrêt isentropique et M le nombre de Mach.

et le rapport P/P_i augmente. Le choc se place de telle façon que la recompression qui s'effectue en aval ramène la pression d'éjection P_e à la pression ambiante P_a . Le choc se déplace vers l'aval lorsque P_a diminue. Les variations de P_a n'ont aucun effet sur l'écoulement supersonique qui se développe en amont du choc. Le col est amorcé et les paramètres de l'écoulement suivent une évolution isentropique. Les valeurs de Ma et P se placent, en amont du choc, sur une courbe unique (courbe (d)). La limite du régime 2 est atteinte lorsque le choc droit se place dans la section d'éjection de la tuyère (courbe (e)). La pression d'éjection en aval du choc est P_{a2} .

- Régime 3 (courbes (f)&(g), Fig.13-14) : il apparaît pour des valeurs de P_a plus faibles que P_{a2} . L'écoulement dans le divergent est entièrement supersonique et la pression d'éjection correspond à une évolution isentropique : $P_e = P_{isen}$. Les variations de P_a ne modifient plus l'écoulement à l'intérieur de la tuyère. Comme $P_e = P_{isen}$ est inférieure à P_a , l'adaptation de pression entre le jet issu de la tuyère et l'atmosphère ambiante doit se faire à l'extérieur du divergent, par l'intermédiaire d'ondes de choc obliques. Ces ondes de choc forment une série de cellules périodiques en forme de diamant. La taille des cellules augmente lorsque la pression ambiante P_a diminue. La limite du régime 3 est atteinte lorsque la pression ambiante devient égale à $P_{a3} = P_{isen}$. La tuyère est alors parfaitement adaptée, les cellules de choc disparaissent et il n'y a plus de recompression externe.
- Régime 4 (courbe (k), Fig.13-14) : pour $P_a < P_{isen}$, les gaz éjectés par la tuyère se détendent à

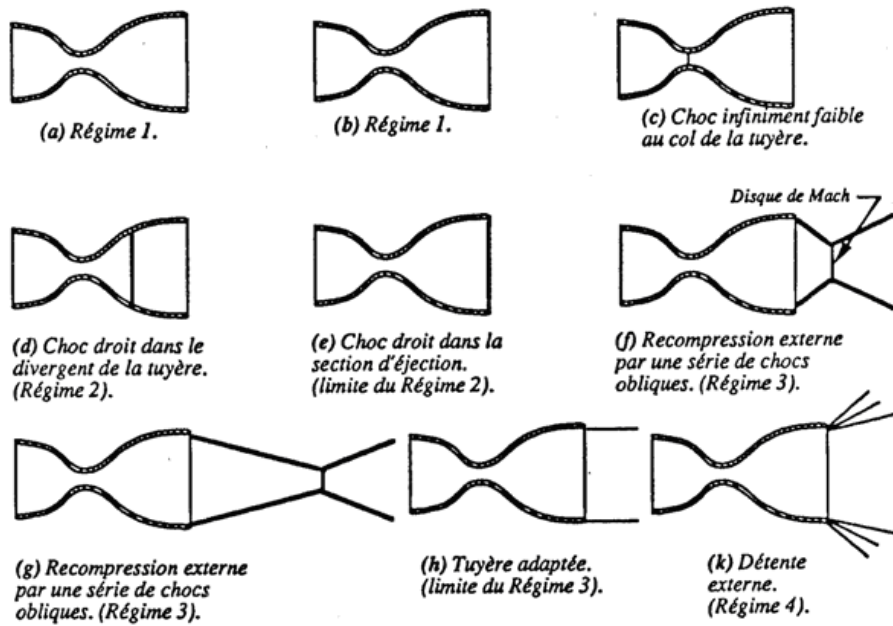


FIGURE 14 – Types d’ondes de choc dans une tuyère de Laval d’après Candel (1995).

l’extérieur par l’intermédiaire d’une série d’ondes de détente obliques. Ce régime apparaît lorsque la tuyère n’est plus capable d’assurer une détente complète jusqu’à la pression ambiante. On retrouve ce régime pendant la phase propulsive d’une fusée aux très hautes altitudes. Les gaz éjectés par les moteurs forment alors un panache évasé caractéristique de la détente externe. Il est à noter que $(P/P_i)_*$ correspond à $(2/(\gamma + 1))^{\gamma/(\gamma-1)}$ et vaut 0.527 pour l’air ($\gamma = 1.405$).

5.3 Souffleries subsoniques et supersoniques

Pour simuler les conditions de fonctionnement de systèmes aérodynamiques réels (maquette d’avion, profil d’aile . . .), on utilise des souffleries. La figure 15 donne un exemple de soufflerie à deux cols. Ces installations comprennent un système d’alimentation et de mise en vitesse des gaz, une veine d’essai et un système d’évacuation des gaz ou une boucle de récupération permettant la recirculation des gaz. L’accélération des gaz est obtenue à l’aide d’une tuyère et la récupération d’une partie de l’énergie cédée au fluide est réalisée par un diffuseur.

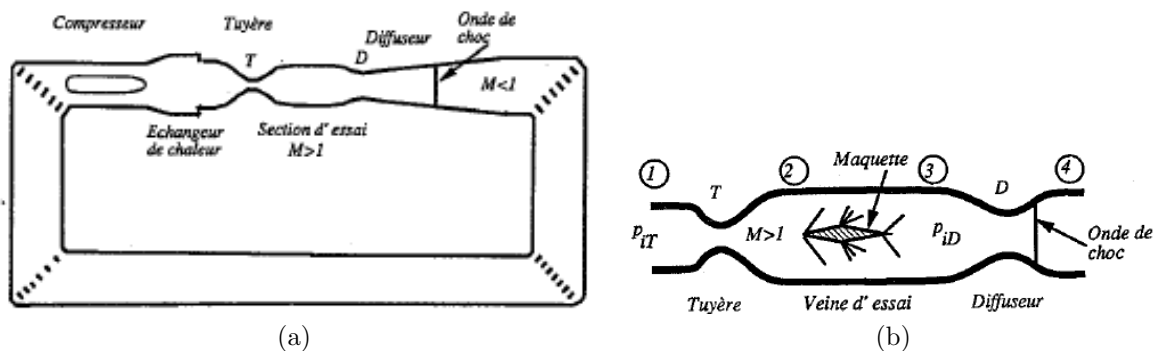


FIGURE 15 – Soufflerie continue à deux cols d’après Candel (1995).

L’accélération des gaz à vitesse supersonique est réalisée à l’aide d’une tuyère convergente-divergente. Il existe des souffleries à rafales alimentées par un réservoir haute-pression. Les plus courantes sont les souffleries continues car elles permettent des essais plus longs (Fig.15). Elles comportent généralement

deux cols et une boucle de retour des gaz. Le premier col, celui de la tuyère, permet l'accélération des gaz. Le second col appartient au diffuseur. Un échangeur de chaleur est souvent placé sur la boucle de retour des gaz pour éviter l'échauffement continu de l'écoulement. Pour augmenter le nombre de Reynolds, la soufflerie peut être pressurisée. Le même effet est obtenu en augmentant la température du fluide, puisque cela fait diminuer sa viscosité. Pour atteindre des nombres de Mach et des températures génératrices élevés, caractéristiques du domaine hypersonique, on utilise des souffleries à arc et des tubes à choc.

On va s'intéresser maintenant plus particulièrement aux configurations à deux cols utilisés dans les souffleries supersoniques, comme celle présentée sur la figure 15. En régime permanent, l'écoulement initialement subsonique est accéléré par la tuyère T et devient supersonique dans le divergent. L'écoulement reste supersonique dans la veine d'essai. Comme le nombre de Mach M est supérieur à 1, le convergent du diffuseur D produit une décélération des gaz. On garde un nombre de Mach $M > 1$ au col et l'écoulement est accéléré sur une portion du divergent du diffuseur. Un choc droit réalise la recompression de l'écoulement. En aval du choc, l'écoulement redevient subsonique.

Pour maintenir un écoulement supersonique dans la section d'essai, il faut nécessairement que la section du col du diffuseur soit plus grande que celle de la tuyère : $A_{CD} > A_{CT}$. Comme l'écoulement est adiabatique dans toute la veine, les températures d'arrêt isentropiques de la tuyère T_{iT} et du diffuseur T_{iD} sont identiques. Du fait des frottements sur la maquette et aux possibles ondes de choc, la pression d'arrêt isentropique diminue, d'où : $P_{iT} > P_{iD}$. Comme le débit massique est conservé, on en déduit que : $P_{iT}A_T^* = P_{iD}A_D^*$ et donc $A_D^* > A_T^*$. Comme $M > 1$ au col du diffuseur, $A_{CD} > A_D^*$. On obtient ainsi : $A_{CD}/A_{CT} > A_D^*/A_T^* > 1$, soit $A_{CD} > A_{CT}$ comme dit précédemment.

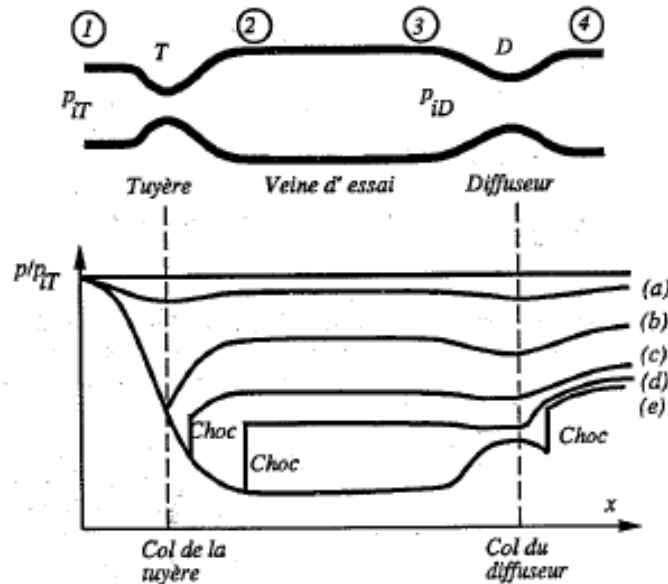


FIGURE 16 – Distributions de pression dans une installation à deux cols d'après Candel (1995).

On suppose alors que la condition $A_{CD} > A_{CT}$ est vérifiée et on s'intéresse aux différents régimes de fonctionnement de la soufflerie lorsqu'on fait diminuer la pression à l'échappement du diffuseur. La figure 16 présente les différentes notations. Comme pour le cas de la tuyère de Laval, on admet que la pression d'arrêt $P_{iT} = P_{i1}$ garde une valeur constante. Les régimes de fonctionnement correspondant à des valeurs de P_4 (la pression à l'échappement du diffuseur) de plus en plus faibles sont représentés sur la figure 17 :

- Régime 1 (Fig.16a-17a) : P_4 est proche de P_{i1} et l'écoulement est subsonique partout. La tuyère et le diffuseur fonctionnent comme des Venturi. La limite de ce régime est atteinte lorsque, pour une valeur suffisamment faible de P_4 , la pression au col devient égale à la pression critique $P_{T*} = P_{i1}(2/(\gamma + 1))^{\gamma/(\gamma-1)}$. Une onde de choc apparaît alors au col de la tuyère (Fig.16b-17b).
- Régime 2 (Fig.16c-17c) : pour des valeurs de P_4 plus faibles, le choc se déplace vers l'aval tout

en restant dans le divergent de la tuyère. L'écoulement dans la veine d'essai reste subsonique. Le changement de régime intervient lorsque le choc se place au voisinage de la section de sortie de la tuyère (Fig.16d-17d). Une légère diminution de la pression P_4 entraîne le déplacement rapide du choc vers l'aval.

- Régime 3 (Fig.16e-17e) : l'écoulement devient supersonique dans la veine d'essai, le diffuseur est amorcé et le choc vient se placer dans le divergent du diffuseur. On dit que le choc a été avalé par le diffuseur produisant l'amorçage du deuxième col. Lorsque ce régime est établi, on relève la pression P_4 pour positionner le choc dans une section plus proche du col du diffuseur (Fig.16f-17f). Il faut cependant prendre garde à éviter le retour du choc vers la tuyère et le désamorçage du diffuseur.

Ces trois régimes apparaissent successivement lors de la mise en route de la soufflerie. En partant du repos, le compresseur tend à augmenter la pression d'arrêt P_{iT} en amont de la tuyère et à faire baisser la pression statique P_4 en aval du diffuseur. Il est à noter que ces variations de pression s'effectuent de façon quasi-stationnaire.

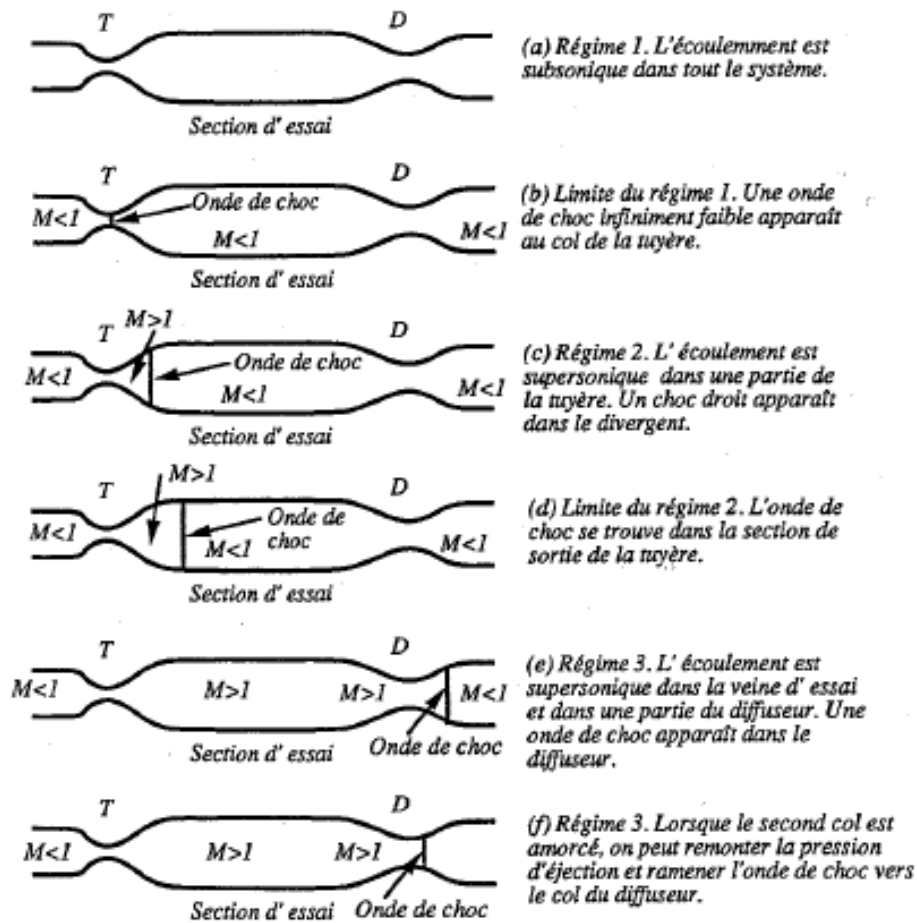


FIGURE 17 – Configurations d'écoulement dans un système à deux cols d'après Candel (1995).

6 Bibliographie

Quelques ouvrages pour la partie cours :

- S. Candel, *Mécanique des fluides, Cours*, Dunod, Paris, 1995.
- R. Comolet, *Mécanique expérimentale des fluides, Tome I : Statique et dynamique des fluides non visqueux*, 5e Ed. Masson, Paris, 1992.
- J. Gosse, *Mécanique des fluides*, Techniques de l'ingénieur, 1995.
- A. Lallemand, *Écoulements monodimensionnels des fluides compressibles*, Techniques de l'ingénieur, 1996.
- P.L. Viollet, *Mécanique des fluides à masse volumique variable*, Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées, 1997.

Quelques ouvrages pour la partie exercices :

- S. Candel, *Problèmes résolus de Mécanique des fluides*, Dunod, Paris, 1995.
- R. Comolet & J. Bonnin, *Mécanique expérimentale des fluides, Tome III : recueil d'exercices*, 5e Ed. Masson, Paris, 1992.
- D. Desjardins, M. Combarrous, N. Bonneton, *Mécanique des fluides : Problèmes résolus avec rappels de cours*, Dunod, collection Sciences Sup, 2002.

Pour toute question, envoyez moi un email à sebastien.poncet@univ-cezanne.fr.