

# RAYONNEMENT

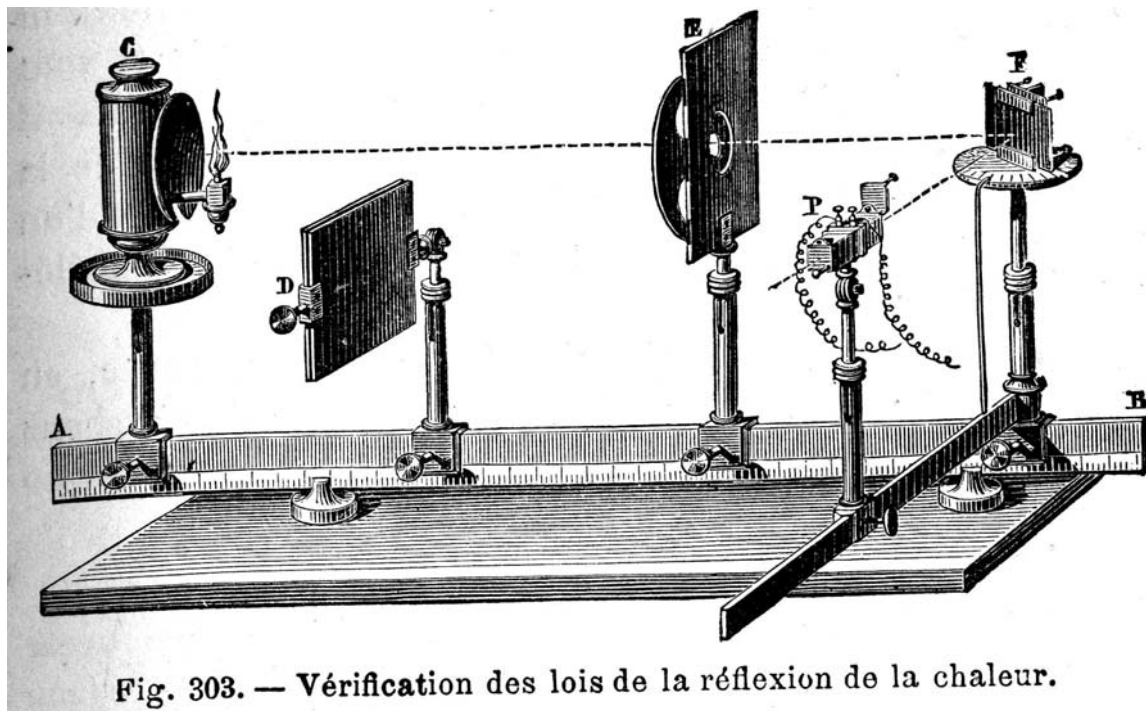


Fig. 303. — Vérification des lois de la réflexion de la chaleur.

## INTRODUCTION

Les mécanismes de transferts de chaleur dépendent fortement de la température. En conduction et convection, cette dépendance met en jeu principalement les différences de températures et peu le niveau de température ; par contre en rayonnement l'importance des échanges est fortement liée au niveau de la température.

Suivant ce niveau la qualité du rayonnement va être très différente. Dans le domaine du bâtiment deux types de rayonnement seront rencontrés : le rayonnement infrarouge (rayonnement des parois "invisible") et le rayonnement visible (rayonnement solaire...). Un autre aspect important de ce mode de transfert est l'aspect géométrique du problème et une géométrie spatiale qui nous obligera à utiliser des méthodes spécifiques pour pouvoir résoudre certains problèmes.

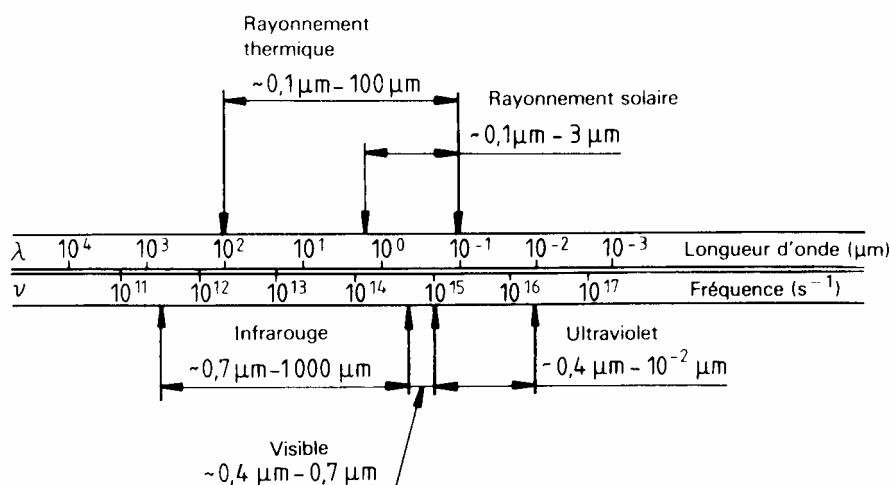
### *Mais qu'est ce que le rayonnement ?*

A l'heure actuelle la nature du rayonnement et son mécanisme de transport ne sont pas entièrement établis. Deux théories : la théorie des quanta et la théorie ondulatoire s'opposent, se complètent et permettent d'expliquer les phénomènes observés. On sait que le rayonnement se propage dans l'espace libre à la vitesse de la lumière ; cette propagation se faisant naturellement. La nature du rayonnement et sa fréquence dépend de la source et l'on définit la longueur d'onde du rayonnement  $\lambda$  comme étant le rapport de la vitesse de propagation  $c$  (vitesse de la lumière) sur sa fréquence.

Tous les corps émettent du rayonnement, cependant nous ne pouvons "ressentir" que des rayonnements de longueur d'onde de  $0,1$  à  $100\mu$ . Dans ce domaine, que nous appellerons rayonnement thermique, le rayonnement est susceptible de chauffer un corps.

Enfin, à l'intérieur de ce domaine, l'œil est capable de percevoir un tout petit domaine appelé rayonnement visible compris entre  $0,38$  et  $0,76\mu$ . Ce rayonnement, appelé aussi lumière, est le seul susceptible d'exciter notre nerf optique.

Dans ce chapitre, consacré uniquement au rayonnement thermique, nous évoquerons successivement les grandeurs physiques caractéristiques du rayonnement, les lois de base, les phénomènes physiques mis en jeu et enfin la façon dont les corps échangent entre-eux du rayonnement.



<b>1.</b>	<b>GRANDEURS UTILES</b>	<b>- 12 -</b>
1.1.	Grandeurs relatives aux surfaces émettrices	- 12 -
1.1.1	Rappel : l'angle solide.	- 12 -
1.1.2	Flux rayonné	- 12 -
1.1.3	Intensité énergétique	- 12 -
1.1.4	Emittance	- 13 -
	Luminance	- 13 -
	Loi de Lambert	- 13 -
	Grandeur relative à la réception du rayonnement.	- 13 -
	Relations entre grandeurs d'émission et de réception	- 14 -
<b>2.</b>	<b>LOIS D'EMISSION DU CORPS NOIR</b>	<b>- 16 -</b>
2.1	Définition du corps noir	- 16 -
2.2	Loi de Planck	- 16 -
2.3	Lois dérivées de la loi de Planck	- 18 -
	Formules simplifiées	- 18 -
	Lois de WIEN	- 18 -
	Loi de STEFAN BOLTZMANN	- 19 -
2.4	Domaine utile du rayonnement	- 19 -
<b>3.</b>	<b>LES CORPS REELS</b>	<b>- 21 -</b>
3.1	Le corps gris. Définition de l'émissivité	- 21 -
3.2	Réception du rayonnement par des corps réels.	- 24 -
3.3	Loi de KIRCHOFF	- 25 -
<b>4.</b>	<b>ECHANGES RADIATIFS</b>	<b>- 26 -</b>
4.1	Echanges radiatifs entre surfaces noires	- 26 -
4.1.1	Les facteurs de forme	- 26 -
4.1.2	Relations entre facteurs de forme	- 27 -
4.1.3	Estimation des facteurs de formes.	- 27 -
4.1.4	Echanges radiatifs – Notion de flux net	- 28 -
4.1.5	Modélisation analogique des échanges radiatifs	- 28 -
4.2	Echanges entre surfaces grises opaques	- 29 -
4.2.1	Echanges radiatifs – Notion de radiosité.	- 29 -
4.2.2	Modélisation analogique des échanges radiatifs	- 30 -
<b>5.</b>	<b>ANNEXE RAY1</b>	<b>- 32 -</b>
<b>6.</b>	<b>ANNEXE RAY2</b>	<b>- 35 -</b>
<b>7.</b>	<b>ANNEXE RAY3</b>	<b>- 37 -</b>
<b>8.</b>	<b>ANNEXE RAY4</b>	<b>- 40 -</b>
<b>9.</b>	<b>ANNEXE RAY5</b>	<b>- 47 -</b>

# 1. GRANDEURS UTILES

Les phénomènes relatifs au rayonnement thermique dépendent d'une part de la longueur d'onde caractéristique de ce rayonnement et d'autre part de la direction d'émission du rayonnement.

*Les grandeurs spécifiques de l'aspect relatif aux longueur d'onde sont baptisées « monochromatiques », celles spécifiques à la direction sont baptisées « directionnelles ».*

## 1.1. Grandeurs relatives aux surfaces émettrices

### 1.1.1 Rappel : l'angle solide.

*L'angle solide est à l'espace ce que l'angle plan est au plan.*

L'angle plan est défini comme étant le rapport de l'arc intercepté au rayon du cercle. L'unité est le radian (rd). L'angle solide est le rapport de la surface interceptée sur une sphère sur le carré du rayon de la sphère. L'unité est le stéradian (sr). L'angle solide de l'ensemble de l'espace est  $4\pi$  stéradians. Cette grandeur est très utile pour quantifier la « façon » dont on voit une partie de l'espace ou une surface donnée à partir d'un point.

### 1.1.2 Flux rayonné

C'est la puissance totale rayonné par une source dans tout l'espace.

Ce flux  $\Phi$  est émis pour différentes longueurs d'onde, aussi peut-on décomposer ce flux en flux monochromatique élémentaire  $\phi_\lambda$  qui permet de caractériser précisément la "façon" dont le corps rayonne.

$$\Phi_\lambda \text{ est tel que } \Phi = \int_0^\infty \Phi_\lambda \cdot d\lambda$$

Cette grandeur est généralement exprimé en W/μ

Quantifier le flux émis par une source dans un domaine de longueur d'onde  $(\lambda_1, \lambda_2)$  donné, revient à exprimer

$$\Phi = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Phi_\lambda \cdot d\lambda$$

### 1.1.3 Intensité énergétique

Le flux rayonné par une source part, a priori, dans tout l'espace. L'intensité caractérise l'émission du corps dans une direction donnée Ox autour d'un angle solide élémentaire  $d\Omega$ .

$$I_{ox} = \frac{d\Phi_{0x}}{d\Omega} \text{ en Watt/stéradian}$$

Cette grandeur est intéressante pour caractériser dans l'espace comment cette surface émet. L'ensemble des vecteurs  $\vec{T}_{ox}$  définit une surface appelée indicatrice d'émission.

Comme pour le flux rayonné, nous pouvons aussi définir l'intensité monochromatique  $I_{ox,\lambda}$  telle que

$$I_{ox} = \int_0^\infty I_{ox,\lambda} \cdot d\lambda$$

### 1.1.4 Emittance

C'est le flux total émis par une surface rapporté à l'unité de cette surface.

$$M = \frac{d\Phi}{dS} \text{ en Watt/m}^2$$

Cette émittance peut aussi être définie en fonction de la longueur d'onde. Il s'agit alors de l'émittance monochromatique  $M_\lambda$  telle que

$$M = \int_0^\infty M_\lambda \cdot d\lambda$$

Nous verrons ultérieurement l'importance de cette grandeur dans la loi fondamentale du rayonnement.

### Luminance

La luminance correspond au rapport du flux total  $d^2\phi_{ox}$  émis par une surface  $dS'$  dans un angle solide  $d\Omega$ . La surface  $dS'$  est celle la surface  $dS$  vue de la direction  $Ox$  qui fait un angle  $\theta$  avec la normale à cette surface.

$$L_{ox} = \frac{d^2\Phi_{ox}}{d\Omega dS \cos\theta}$$

Comme précédemment la luminance monochromatique est définie par

$$L_{ox} = \int_0^\infty L_{ox,\lambda} \cdot d\lambda$$

La luminance permet de caractériser la perception de ce rayonnement par un observateur.

## Loi de Lambert

Une surface obéit à la loi de Lambert, si la luminance est constante dans toutes les directions. On parle aussi dans ce cas d'émission diffuse ou isotrope.

Dans ces conditions une relation simple lie la luminance et l'émittance d'un corps :

$$M = \pi \cdot L.$$

La démonstration (voir annexe RAY1) revient à sommer la luminance dans tout le demi-espace.

Par ailleurs, dans ces conditions

$$I_{ox} = L \cdot dS \cdot \cos\theta$$

L'indicatrice des intensités correspond alors à une sphère tangente à la surface d'émission.

## Grandeur relative à la réception du rayonnement.

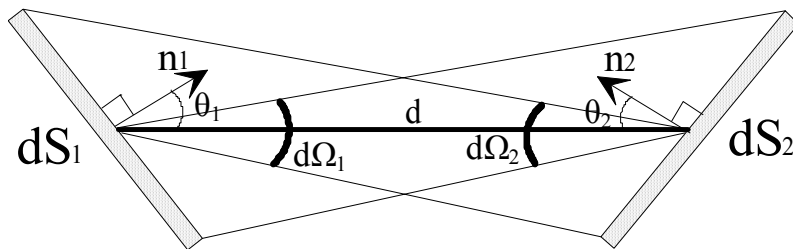
Si une surface émet du rayonnement...elle en reçoit aussi.

L'éclairement  $E$  (en Watt/m<sup>2</sup>) correspond au flux total  $d\Phi$  reçu par une surface  $dS$ .

$$E = \frac{d\Phi}{dS}$$

## Relations entre grandeurs d'émission et de réception

Considérons deux surfaces élémentaires  $dS_1$  et  $dS_2$ , quelle relation existe-t-il entre le flux rayonné par  $dS_1$  et celui reçu par  $dS_2$ .



$$d^2\Phi_{12} = L_1 \cdot dS_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot d\Omega_1$$

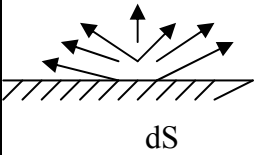
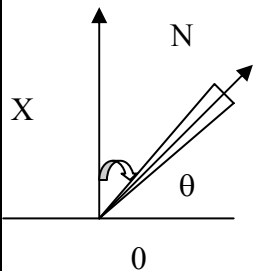
Avec 
$$d\Omega_1 = \frac{dS_2 \cdot \cos \theta_2}{d^2}$$

$$d^2\Phi_{12} = L_1 \frac{dS_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot dS_1 \cdot \cos \theta_1}{d^2}$$

L'éclairement résultant sur la surface  $dS_2$  sera :

$$E_2 = \frac{d^2\Phi_{12}}{dS_2}$$

donc : 
$$E_2 = L_1 \frac{dS_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{d^2}$$

Classification selon la géométrie Directions, surfaces concernées		Classification selon la composition spectrale du rayonnement	
		Grandeurs " totales " (concernant l'ensemble du spectre rayonné)	Grandeurs "monochromatiques" (concernant une longueur d'onde $\lambda$ )
<p><u>Grandeurs Hémisphériques</u></p> <p><i>Puissance émise dans l'ensemble des directions de l'espace environnant</i></p> 	... pour une source d'aire dS	<p>Flux total</p> <p><u>Symbole</u> : <math>\Phi</math></p> <p><u>Unité</u> : W</p>	<p>Flux monochromatique</p> <p><u>Symbole</u> : <math>\Phi_\lambda</math></p> $\Phi_\lambda = \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} \right)$ <p>unité : W/m ou W/<math>\mu</math>m</p>
	... pour l'unité de surface de la source	<p>Emittance totale</p> <p><u>Symbole</u> : M</p> $M = \frac{d\Phi}{dS}$ <p><u>Unité</u> : W/m<sup>2</sup></p>	<p>Emittance monochromatique</p> <p><u>Symbole</u> : <math>M_\lambda</math></p> $M_\lambda = \left( \frac{dM}{d\lambda} \right)_\lambda = \left( \frac{d^2\Phi}{dS d\lambda} \right)_\lambda$ <p><u>Unité</u> : W/m<sup>3</sup> ou W/m<sup>2</sup>.<math>\mu</math>m</p>
<p><u>Grandeurs Directionnelles</u></p> <p><i>Puissance émise dans une direction donnée Ox</i></p> 	... pour une source d'aire dS	<p>Intensité totale dans la direction Ox</p> <p><u>Symbole</u> : <math>I_{ox}</math></p> $I_{ox} = \frac{d\Phi_{ox}}{d\Omega}$ <p><u>Unité</u> : W/sr</p>	<p>Intensité monochromatique dans la direction Ox</p> <p><u>Symbole</u> : <math>I_{ox, \lambda}</math></p> $I_{ox, \lambda} = \left( \frac{dI_{ox}}{d\lambda} \right)_\lambda = \left( \frac{d^2\Phi_{ox}}{d\Omega d\lambda} \right)_\lambda$ <p><u>Unité</u> : W/(m.sr) ou W/<math>\mu</math>.sr</p>
	... par l'unité de surface de la source projetée perpendiculairement à la direction d'émission	<p>Luminance totale dans la direction Ox</p> <p><u>Symbole</u> : <math>L_{ox}</math></p> $L_{ox} = \frac{dI_{ox}}{dS \cos \theta} = \frac{d^2\Phi_{ox}}{d\Omega dS \cos \theta}$ <p><u>Unité</u> : W/(m<sup>2</sup>.sr)</p>	<p>Luminance monochromatique dans la Direction Ox</p> <p><u>Symbole</u> : <math>L_{ox, \lambda}</math></p> $L_{ox, \lambda} = \left( \frac{dL_{ox}}{d\lambda} \right)_\lambda = \frac{d^2\Phi_{ox, \lambda}}{d\Omega dS \cos \theta}$ <p><u>Unité</u> : W/(m<sup>3</sup>.sr)</p>

$d^2\Phi_{ox}$  = flux total émis par la source dS dans un angle solide  $d\Omega$  entourant la direction Ox

## 2. LOIS D'EMISSION DU CORPS NOIR

### 2.1 Définition du corps noir

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les grandeurs radiatives utiles dépendent d'un grand nombre de facteurs ; elles sont en particulier dépendantes de la longueur d'onde (aspect monochromatique) et de la direction (aspect directionnel).

Pour simplifier dans un premier temps le problème, une démarche consiste à faire intervenir le concept de corps noir qui va nous servir ensuite de référence pour étudier le rayonnement des corps réels. Cette démarche est similaire à celle utilisée pour l'étude des gaz, étude pour laquelle il est fait référence au concept de gaz parfait.

Le corps noir est défini comme étant le corps qui, à une température donnée, émet par rayonnement le maximum de flux énergétique. Ceci doit donc être aussi vrai pour toutes les longueurs. Nous verrons ultérieurement que si le corps noir est un « émetteur parfait » il est aussi un « absorbeur parfait ».

Le corps noir, qui est utilisé comme référence, est aussi appelé étalon de rayonnement ou radiateur idéal.

Le corps noir étant maintenant défini, nous allons évoquer les lois d'émission de rayonnement du corps noir ; le passage aux lois d'émission des corps réels se fera ensuite aisément.

Remarque : Par convention toutes les grandeurs relatives au corps noir auront l'exposant ° . (ex :  $M^\circ$ ,  $L^\circ$  ...)

### 2.2 Loi de Planck

A partir de la théorie des quantas, PLANCK a établi la relation liant l'émittance monochromatique  $M^\circ$  du corps avec sa température et la longueur d'onde.

$$M^\circ_{\lambda,T} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda \cdot T}} - 1}$$

avec  $\lambda$  longueur d'onde (en m ou  $\mu$ ) et T la température en K.

Les coefficients C1 et C2 ont pour expression

$$C_1 = 2 h c^2 \pi$$

$$C_2 = h \cdot c/k$$

Avec c vitesse de la lumière, h constante de Planck et k constante de Boltzmann.

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  ont alors pour valeurs :

$$C_1 = 3,74 \cdot 10^{-16} \text{ W.m}^2$$

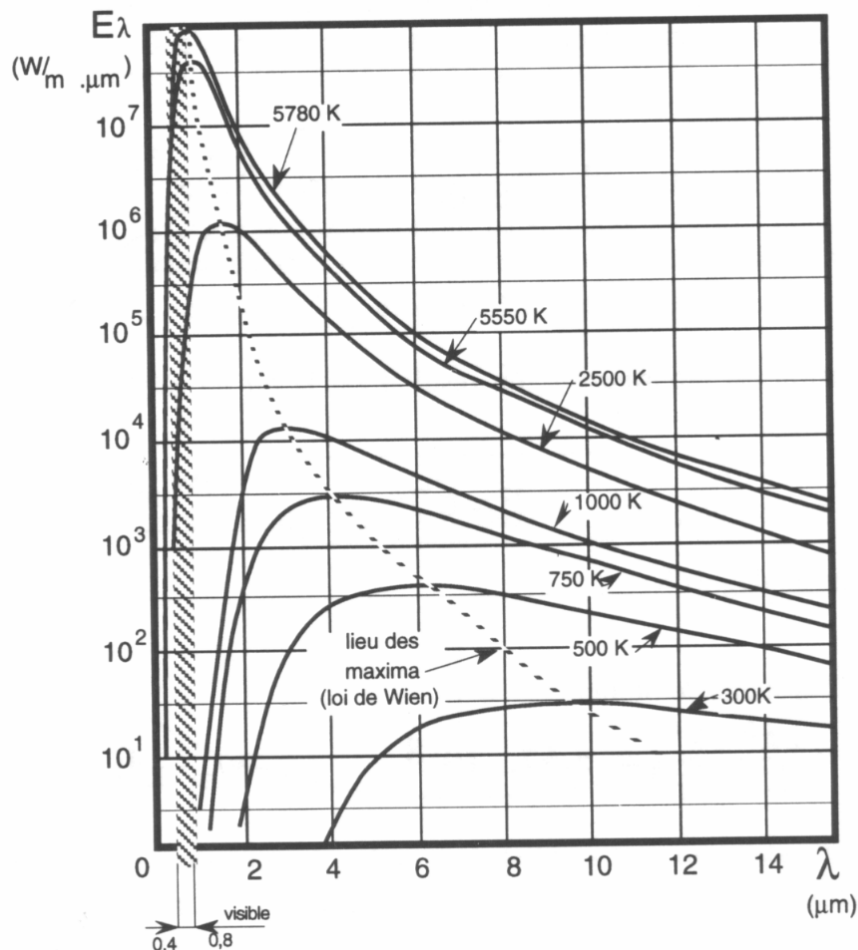
$$C_2 = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ m.K}$$

$$C_1 = 3,74 \cdot 10^8 \text{ W.}\mu^4.\text{m}^{-2}$$

$$C_2 = 14400 \mu.\text{K}$$

La loi de Planck est la loi de base pour ce qui concerne l'émission du rayonnement. La figure ci-après donne l'allure générale de cette fonction pour différentes températures..

Quelques remarques sont à faire :



- Toutes ces courbes passent par l'origine et sont tangentes en ce point à l'axe des abscisses.
- L'axe des abscisses est l'asymptote de ces courbes lorsque la longueur d'onde tend vers l'infini.
- Ces courbes passent par un maximum qui est d'autant plus grand que la température est élevée.
- La longueur d'onde correspondant à ce maximum est d'autant plus petite que la température du corps est élevée.
- Pour une longueur d'onde donnée, l'émittance est d'autant plus élevée que la température est élevée

## 2.3 Lois dérivées de la loi de Planck

### Formules simplifiées

Bien que la formule de Planck soit facilement programmable, des formes dérivées peuvent être utilisées pour simplifier certaines formulations. Citons :

1) pour les petites longueurs d'onde dans le domaine visible

$e^{C_2/\lambda T}$  est grand devant 1  
d'où  $M_{\lambda,T}^o = C_1 \lambda^{-5} e^{-C_2/\lambda T}$

2) pour les grandes longueurs d'onde dans le lointain infrarouge le développement de  $e^{C_2/\lambda T}$  permet d'écrire :

$$M_{\lambda,T}^o = \frac{C_1 T}{C_2 \lambda^4}$$

### Lois de WIEN

1) Première loi de WIEN

Cette loi permet d'exprimer pour quelle valeur de longueur d'onde  $\lambda_m$  l'émittance monochromatique est maximale.

Il suffit d'annuler la dérivée de l'émittance

$$\frac{dM_{\lambda,T}^o}{d\lambda} = 0$$

On obtient alors une relation très simple  $\lambda_m T = 2880 \mu.K$

Cette relation est très intéressante, car elle permet de savoir pour quelle longueur d'onde  $\lambda_m$  un corps noir à la température T émet le maximum de rayonnement.

T = 300 K	$\lambda_m = 9,6 \mu m$
T = 500 K	$\lambda_m = 5,8 \mu m$
T = 750 K	$\lambda_m = 3,8 \mu m$
T = 1000 K	$\lambda_m = 2,9 \mu m$
T = 2000 K	$\lambda_m = 1,44 \mu m$
T = 3000 K	$\lambda_m = 0,96 \mu m$
T = 5790 K	$\lambda_m = 0,5 \mu m$ .

On constate qu'un corps à la température ambiante (~300 K) émet principalement du rayonnement infrarouge de grandes longueurs d'onde (GLO). C'est le rayonnement qui est présent tout autour de nous, mais que nous ne pouvons percevoir car notre œil n'est sensible qu'au rayonnement dont la longueur d'onde est comprise entre 0,36 et 0,76  $\mu m$ . Par contre, le soleil, dont la température de surface est de l'ordre de 5500°C, nous envoie le maximum de rayonnement pour une longueur d'onde de 0,5  $\mu m$  (jaune) dans le visible. C'est exactement la longueur d'onde pour laquelle notre œil a une efficacité lumineuse maximale.

## 2) Deuxième loi de WIEN

Elle exprime la valeur de l'émittance monochromatique maximale. Pour cela, il suffit de remplacer  $\lambda_m$  par sa valeur dans la loi de Planck.

On obtient alors

$$(M_{\lambda_m, T}^{\circ})_{\max} = B T^5$$

avec T en Kelvin

$$B = 1,2376 \cdot 10^{-11} \text{ W.m}^{-2} \mu^{-1} \text{ K}^{-5}$$

Cette relation montre l'importance du paramètre température vis à vis de l'émittance. Par exemple, le rapport de l'émittance maximale du soleil (~6000 K) et d'un corps à la température ambiante (~300 K) est de  $3 \cdot 10^6$

## Loi de STEFAN BOLTZMANN

Cette loi exprime l'émittance totale du corps noir. Il suffit de sommer toutes les émittances monochromatiques pour toutes les longueurs d'onde.

$$M^{\circ} = \int_0^{\infty} M_{\lambda, T}^{\circ} \cdot d\lambda$$

On obtient après intégration

$$M^{\circ} = \sigma_0 \cdot T^4$$

T en Kelvin

$\sigma_0$  est appelée constante de STEFAN-BOLTZMANN

$\sigma_0$  est égale à  $5,68 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Pour les applications numériques, comme les températures sont généralement supérieures à 100K, il est judicieux d'utiliser la relation

$$M^{\circ} = 5,68 \left( \frac{T}{100} \right)^4$$

## 2.4 Domaine utile du rayonnement

Si la loi de Planck permet aisément de calculer l'émittance monochromatique d'un corps pour une température T donnée et une longueur d'onde  $\lambda$  donnée, il est souvent nécessaire de connaître le flux énergétique émis par un corps à la température T dans un domaine de longueur d'onde donnée  $\lambda_1 - \lambda_2$

On exprime en général ce flux par rapport au flux total ; il s'agit alors de la fraction d'émittance totale.

$$E_{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{\lambda, T}^{\circ} \cdot d\lambda}{M^{\circ}}$$

Bien que cette relation puisse se programmer, des tables, données en annexe RAY2, permettent pour différentes températures d'exprimer  $F_{0-\lambda}$

La fraction d'émittance totale dans le domaine  $\lambda_1-\lambda_2$  est alors :

$$F_{\lambda_1,\lambda_2} = F_{0,\lambda_2} - F_{0,\lambda_1}$$

Cette fraction d'émittance totale permet de définir le domaine utile de rayonnement comme étant le domaine spectrale compris entre  $0,5 \cdot \lambda_m$  et  $5 \cdot \lambda_m$  ( $\lambda_m$  étant la longueur d'onde du maximum de l'émittance monochromatique). Dans ce domaine, on constate que le corps noir émet 96 % de son rayonnement c'est à dire que :

$$F_{5,\lambda_m} - F_{0,5,\lambda_m} = 0.956$$

## 3. LES CORPS REELS

### 3.1 Le corps gris. Définition de l'émissivité

Le corps noir étant « l'étalon » de rayonnement, l'évaluation de l'émission d'un corps réel se fera par rapport à celle du corps noir placé dans les mêmes conditions en température en définissant des coefficients globaux, monochromatiques et directionnels appelés émissivités.

Ainsi, les émittances totales ou monochromatiques d'un corps réel s'écrivent :

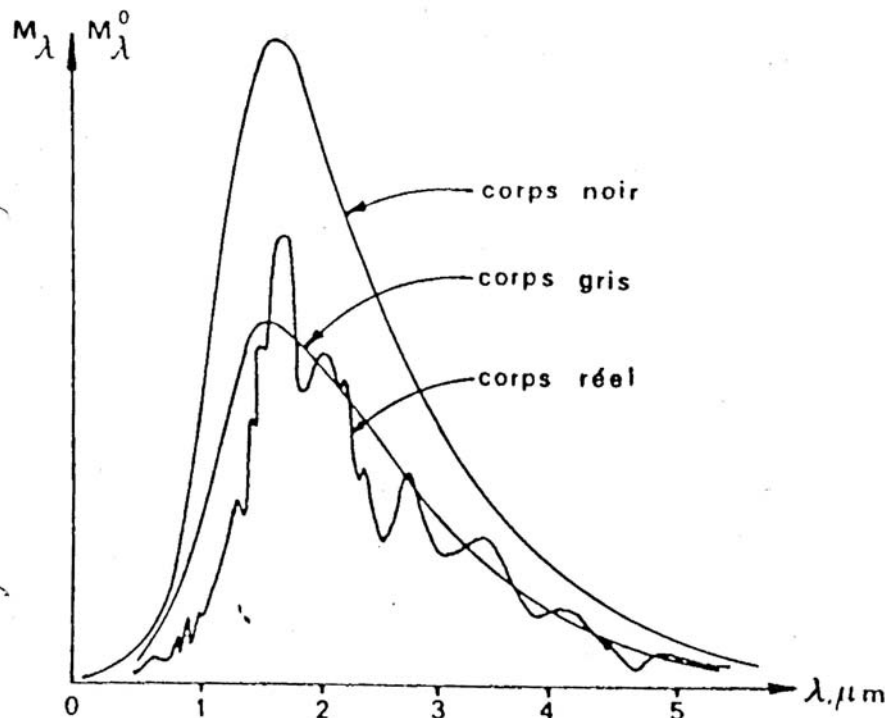
$$\varepsilon = \frac{M}{M^0} \quad M = \varepsilon M^0$$

et

$$\varepsilon_\lambda = \frac{M_\lambda}{M_\lambda^0}$$

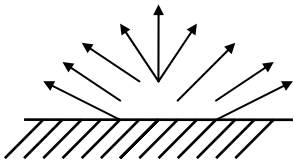
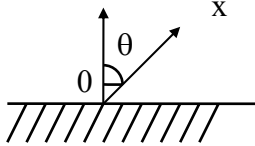
Cette émissivité peut dépendre aussi de la direction. Elle est alors baptisée directionnelle  $\varepsilon_{\text{ox}}$ . Si pour le corps réel, cette émissivité quelque soit la longueur d'onde est constante, ce type d'émission est appelé alors gris ou diffus. Cette approche permet de simplifier la résolution des problèmes.

Lorsqu'il ne sera pas possible de considérer le corps comme gris pour l'ensemble du spectre, cette approximation pourra être réduite à de larges bandes du spectre considéré. Il faudra alors avoir recours à la fraction d'émittance totale pour quantifier l'émission dans les diverses « bandes » d'émission.



Nous donnons dans le tableau suivant l'émissivité hémisphérique totale pour un certain nombre de substances. Ces valeurs numériques correspondent à de faibles températures de surface (20°C).

Matériaux	état de surface	$\varepsilon$
Aluminium	poli	0,06
	oxydé	0,30
Cuivre	poli	0,04
	très oxydé	0,75
Or	pur très poli	0,02
Zinc	pur très poli	0,02
	galvanisé	0,20-0,30
Brique	ordinaire	0,93
	réfractaire (à 1000°)	0,60
Carbone (dépôt de noir de fumée)		0,95-0,98
Argile		0,90
verre ordinaire		0,94
Marbre		0,95
Peintures	Aluminium	0,30-0,60
	noire mâte	0,90
	blanche mâte	0,90-0,95
	peinture à l'huile toutes couleurs	~0,90
Papier		0,95
Bois		0,75-0,95

Classification		selon la répartition spatiale du rayonnement émis	
↓ selon la composition spectrale du rayonnement émis	<i>Nature du rayonnement considéré</i>	Hémisphérique 	Dirigé selon une direction Ox normale 
	Monochromatique	Emissivité monochromatique (hémisphérique) $\epsilon_{\lambda} = \frac{M_{\lambda}}{M_{\lambda}^{\circ}}$	Emissivité monochromatique directionnelle $\epsilon_{Ox,\lambda} = \frac{L_{Ox,\lambda}}{L_{\lambda}^{\circ}} = \frac{L_{Ox,\lambda}}{M_{\lambda}^{\circ} / \pi}$
	Total	Emissivité (totale hémisphérique) $\epsilon = \frac{M}{M^{\circ}} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda} M_{\lambda}^{\circ} d\lambda}{\sigma T^4}$	Emissivité (totale) directionnelle $\epsilon_{Ox} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon_{Ox,\lambda} L_{\lambda}^{\circ} d\lambda}{\int_0^{\infty} L_{\lambda}^{\circ} d\lambda} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon_{Ox,\lambda} M_{\lambda}^{\circ} d\lambda}{\sigma T^4}$

Les émittances du corps réel et du corps noir sont prises à la même température T.

CAS PARTICULIERS (usuels)

1) CORPS GRIS émissivité indépendante de la longueur d'onde

$$\epsilon_{\lambda} \rightarrow \epsilon \text{ et } \epsilon_{Ox,\lambda} \rightarrow \epsilon_{Ox}$$

2) CORPS A EMISSION DIFFUSE (OU ISOTROPE)

émissivité indépendante de la direction :

$$\epsilon_{Ox} \rightarrow \epsilon \text{ et } \epsilon_{Ox,\lambda} \rightarrow \epsilon_{\lambda}$$

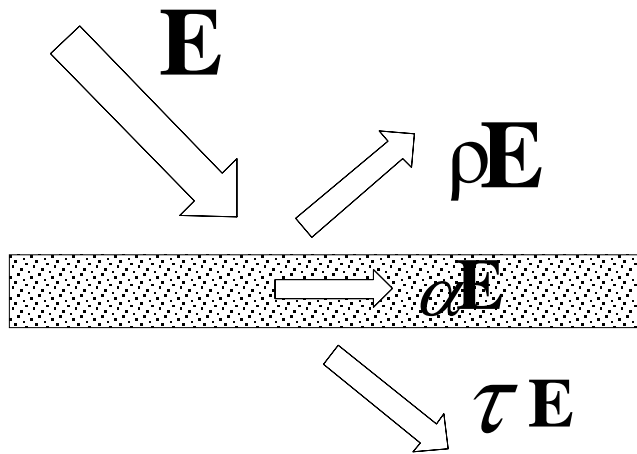
3) CORPS GRIS ET DIFFUSANT : émissivité indépendante de la longueur d'onde et de la direction :

paramètre unique  $\epsilon$ .

Différentes définitions de l'émissivité.

### 3.2 Réception du rayonnement par des corps réels.

Lorsqu'un rayonnement atteint la surface d'un corps, une partie est réfléchie, une autre partie est transmise directement et enfin la dernière partie est absorbée dans la masse du récepteur. Seule cette dernière partie correspond à l'apport énergétique du corps.



Les coefficients caractéristiques sont :

- $\alpha$  coefficient d'absorption
- $\tau$  coefficient de transmission
- $\rho$  coefficient de réflexion

$$\alpha = \frac{\varphi_a}{E} \quad \tau = \frac{\varphi_t}{E} \quad \rho = \frac{\varphi_r}{E}$$

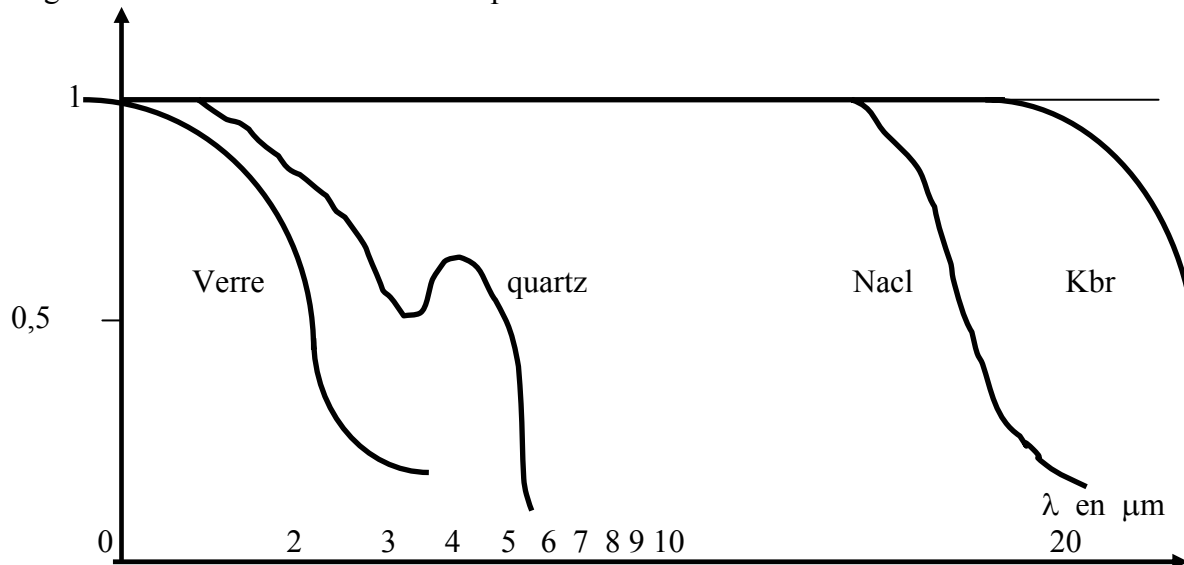
Réception du rayonnement par un corps réel

- avec : E      éclairement  
 $\varphi_a$       flux absorbé  
 $\varphi_t$       flux transmis  
 $\varphi_r$       flux réfléchi

Une relation simple lie les 3 coefficients :

$$\alpha + \tau + \rho = 1$$

Ces coefficients dépendent fortement de la longueur d'onde. C'est le cas pour le verre qui laisse aisément passer les courtes longueurs d'onde et absorbe fortement les grandes longueurs. C'est la base même de l'explication de l'effet de serre.



Transmittivités de matériaux semi-transparents ( $e = 6 \text{ mm}$ )

De même ces coefficients varient aussi en fonction de la direction du rayonnement : c'est l'aspect directionnel.

### 3.3 Loi de KIRCHOFF

Il existe une relation entre les émissivités et les absorptivités. Cette relation est appelée loi de Kirchoff. Elle indique que pour chaque longueur d'onde et chaque direction de l'espace, émissivités et absorptivités monochromatiques sont égales :

$$\varepsilon_{\text{ox},\lambda} = \alpha_{\text{ox},\lambda}$$

dans le cas d'un éclairage et d'une émission diffuses, la loi de Kirchoff peut être étendue aux grandeurs monochromatiques hémisphériques :

$$\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda}$$

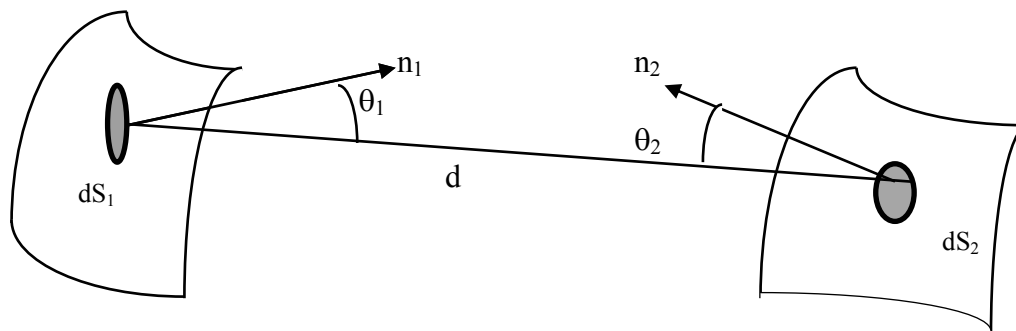
Dans le cas particulier des corps gris cette loi se résume alors par  $\varepsilon = \alpha$ . Elle est souvent utilisée non pas pour l'ensemble du spectre, mais pour des bandes spectrales utiles.

## 4. ECHANGES RADIATIFS

### 4.1 Echanges radiatifs entre surfaces noires

#### 4.1.1 Les facteurs de forme

Considérons deux éléments de surface  $dS_1$  et  $dS_2$  appartenant respectivement à  $S_1$  et  $S_2$  et écrivons l'expression du flux total émis par  $dS_1$  et arrivant sur  $dS_2$ .



Echanges radiatifs entre deux surfaces

Nous avons vu que :

$$d^2\Phi_{12} = \frac{L_1^0 dS_1 \cos\theta_1 dS_2 \cos\theta_2}{d^2}$$

La surface  $dS_1$  obéissant à la loi de Lambert on a :

$$d^2\Phi_{12} = \frac{M_1^0 dS_1 \cos\theta_1 dS_2 \cos\theta_2}{\pi d^2}$$

pour connaître le flux total émis par  $S_1$  et arrivant sur  $S_2$  il suffit d'intégrer sur  $S_2$  puis sur  $S_1$  :

$$\Phi_{12} = M_1^0 \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 \cos\theta_1 dS_2 \cos\theta_2}{\pi d^2}$$

La proportion de flux total émis par  $S_1$  et arrivant sur  $S_2$  sera alors donnée par :

$$F_{12} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{\Phi_{12}}{M_1^0 \cdot S_1}$$

d'où :

$$F_{12} = \frac{1}{\pi S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 \cos\theta_1 dS_2 \cos\theta_2}{d^2}$$

La proportion du flux total émis par  $S_1$  et arrivant sur  $S_2$  est une quantité purement géométrique. Elle s'appelle facteur de forme de la surface  $S_2$  vis à vis de la surface  $S_1$ . Par le même raisonnement, on peut déterminer  $F_{21}$  proportion de flux émis par  $S_2$  et arrivant sur  $S_1$  :

$$F_{21} = \frac{1}{\pi \cdot S_2} \int_{S_2} \int_{S_1} \frac{dS_2 \cdot \cos\theta_2 \cdot dS_1 \cdot \cos\theta_1}{d^2}$$

#### 4.1.2 Relations entre facteurs de forme

a) *Relation de réciprocité*

La symétrie des expressions de  $F_{12}$  et  $F_{21}$  conduit à la réciprocité des facteurs de forme.

$$S_1 \cdot F_{12} = S_2 \cdot F_{21}$$

b) *Relation de complémentarité*

Dans une enceinte fermée, le flux émis  $\Phi_i$  par une surface  $i$  est susceptible d'être reçu par les  $n$  surfaces qui constituent la surface (la surface  $i$  comprise)

$$\Phi_i = \Phi_{i \rightarrow 1} + \Phi_{i \rightarrow 2} + \dots + \Phi_{i \rightarrow i} + \dots + \Phi_{i \rightarrow n}$$

$$\text{d'où } \sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$$

#### 4.1.3 Estimation des facteurs de formes.

Le calcul des facteurs de forme peut devenir très vite complexe et ne constitue pas ici l'objet de ce document. Citons toutefois les quatre grandes voies possibles.

- Utilisation des relations de réciprocité et de complémentarité. Dans ce cas ces deux relations permettent d'accéder simplement aux différents facteurs de forme. Ceci ne sera possible que pour des cas simples.
- Méthode d'Ondracek. Si l'on veut calculer le facteur de forme d'une surface élémentaire  $dS_1$  par rapport à une grande surface  $S_r$ , une seule intégrale est à faire. Le principe de cette méthode est donnée dans l'annexe RAY3.
- Formules et Abaques. De nombreux travaux ont été fait pour des configurations types afin de déterminer ces facteurs de forme. Les formules (annexe RAY4) et abaques (annexe RAY5) nourrissent des livres entiers
- Méthode de Monte-Carlo. L'informatique a permis la mise au point de méthodes très adaptées, méthodes utilisées par l'imagerie numérique. Il suffit, d'un point quelconque de la surface  $S_1$ , de "tirer" aléatoirement un rayon dans l'espace et de vérifier s'il "touche" la surface  $S_2$ . En effectuant un grand nombre de tirages aléatoires, on obtient le facteur de forme entre  $S_1$  et  $S_2$ . Cette méthode permet de traiter des volumes formes complexes, contenant des obstacles.

#### 4.1.4 Echanges radiatifs – Notion de flux net

Toutes les surfaces émettent du rayonnement et reçoivent du rayonnement qui est totalement absorbé dans le cas de corps noir.

Si  $\Phi_i$  est le flux émis et  $\sum_{j=1}^n \Phi_{ji}$  les flux reçus provenant des autres surfaces, le flux net relatif à la surface  $S_i$  correspond à la différence du flux émis moins le flux absorbé

$$\text{D'où : } \Phi_{\text{neti}} = \Phi_i - \sum_{j=1}^n \Phi_{ji}$$

$$\text{ou encore } \Phi_{\text{neti}} = \Phi_i - \sum_{j=1}^n F_{ji} \Phi_j$$

Toutes les surfaces étant noires on peut exprimer ces flux en fonction des émittances.

$$\Phi_{\text{neti}} = M_i^0 S_i - \sum_{j=1}^n F_{ji} S_j M_j^0$$

En tenant compte de la réciprocité des facteurs de forme c'est à dire  $S_j F_{ji} = S_i F_{ij}$

et que  $\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$  on peut écrire :

$$\Phi_{\text{neti}} = \sum_{j=1}^n S_i F_{ij} (M_i^0 - M_j^0)$$

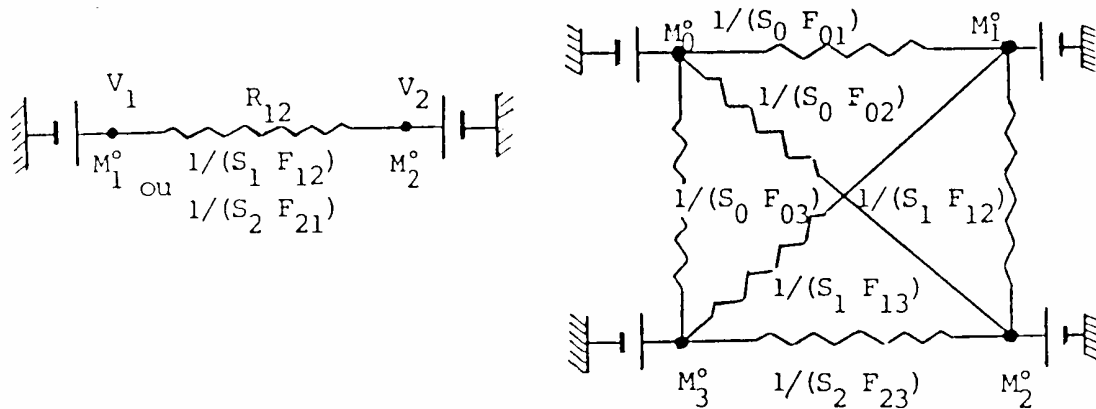
Remarque : Suivant le signe de  $\Phi_{\text{neti}}$  il est possible de savoir si la surface perd de l'énergie par rayonnement ( $\Phi_{\text{net}} > 0$ ), si elle en gagne ( $\Phi_{\text{net}} < 0$ ) ou si les pertes sont compensées par les gains ( $\Phi_{\text{net}} = 0$ ) ; dans ce dernier cas la surface est adiabatique vis à vis de l'extérieur.

#### 4.1.5 Modélisation analogique des échanges radiatifs

L'expression du flux net échangé par deux surfaces quelconques rappelle l'expression du courant électrique traversant un réseau  $I_{ij} = \frac{V_i - V_j}{R_{ij}}$

Ce constat nous amène à proposer une représentation analogique des échanges, analogie qui peut se résumer par le tableau suivant :

Rayonnement	Electricité
Flux échangé par rayonnement $\Phi_{12} = S_1 F_{12} (M_1^0 - M_2^0)$	Intensité du courant électrique $I = K (V_1 - V_2)$
Différence entre les émittances de deux surfaces noires $M_1^0 - M_2^0$	Différence de potentiel entre deux nœuds du réseau $V_1 - V_2$
Facteur de forme * surface $S_1 F_{12}$	Conductance entre deux nœuds aux deux potentiels $K = \frac{1}{R}$ R = résistance



Cette analogie, définie ici pour deux surfaces, peut s'étendre ensuite à n surfaces. Le réseau ainsi créé nécessitera toujours le calcul de résistances équivalentes de résistances placés en série et / ou parallèle.

Remarque :

Le bilan thermique d'une surface fait apparaître deux types de surfaces.

- celles pour lequel le flux net est nul. Cette surface est alors considérée isolée du système extérieur : le flux absorbé est égal au flux émis.
- celles pour lequel le flux net n'est pas nul. Cette surface perd ou gagne de l'énergie par rayonnement. Pour cela, elle doit être reliée au système extérieur qui apportera ou puisera de l'énergie.

## 4.2 Echanges entre surfaces grises opaques

### 4.2.1 Echanges radiatifs – Notion de radiosité.

Les échanges radiatifs entre surfaces grises sont plus complexes, car les surfaces réfléchissent du rayonnement et il apparaît alors dans une enceinte fermée des multiréflexions . Une nouvelle notion est alors utilisée : c'est la radiosité J. La radiosité de la surface est la somme du flux émis et du flux réfléchi par unité de surface.

$$J = \epsilon M^0 + \rho E$$

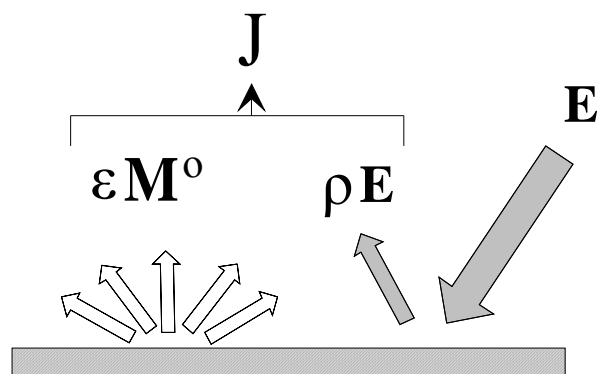
J radiosité de la surface grise

$\epsilon M^0$  émittance de la surface grise

E éclairement de la surface

Le flux net de la surface est alors :

$$\Phi_{net} = \epsilon M^0.S - \alpha .E.S$$



Pour les surfaces opaques ( $\tau = 0$ ), le flux net peut s'exprimer en fonction de l'émittance et de la radiosité. A partir des deux équations précédentes on obtient pour la surface  $i$  :

$$\Phi_{\text{net } i} = \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} (M_i^o - J_i) S = \frac{\epsilon}{\rho} (M_i^o - J_i) S$$

L'échange entre les surfaces  $S_i$  et  $S_j$  peut s'exprimer en fonction de leur radiosité. La surface  $S_i$  « envoie » un flux radiatif dans tout l'espace  $S_i J_i$ . Seule la fraction  $F_{ij}$   $S_i J_i$  atteint la surface  $S_j$ . Réciproquement de la surface  $S_j$  il arrive sur  $S_i$  la fraction  $F_{ij}$   $S_j J_j$ .

Le flux net échangé entre  $S_i$  et  $S_j$  est alors

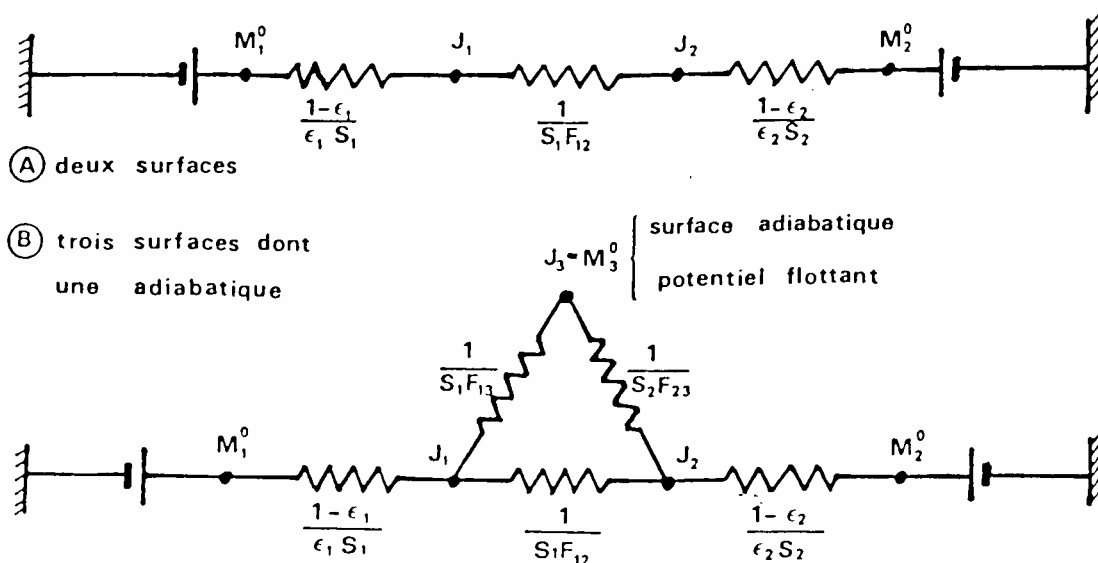
$$\Phi_{\text{net } ij} = (J_i - J_j) \cdot S_i \cdot F_{ij}$$

Cette relation est similaire à celle des corps noirs, si l'on remplace la radiosité par l'émittance.

### 4.2.2 Modélisation analogique des échanges radiatifs

Une représentation analogique peut alors être construite.

- pour chaque surface est définie une résistance caractéristique du flux net de la surface $i$	$\frac{1 - \epsilon_i}{\epsilon_i S_i} = \frac{\rho_i}{\epsilon_i S_i}$
- entre deux surfaces $S_i$ et $S_j$ est définie une résistance caractéristique du flux échangé	$1/(S_i F_{ij})$



Remarque : comme pour les échanges entre surfaces noires, la généralisation des échanges entre surfaces grises permet de bâtir un réseau analogique pour lequel certaines surfaces seront en équilibre et d'autres, reliées avec l'extérieur, auront un flux net non nul.

## 5. ANNEXE RAY1

**Loi de Lambert**

## Relation entre l'émittance $M$ et la luminance $L$ dans le cas où la surface d'émission suit la loi de LAMBERT

*Rappel : L'émission d'une surface suit la loi de Lambert, si la luminance du corps ne dépend pas de la direction d'émission c'est à dire que l'émission est diffuse.*

Par définition :

$$M = \frac{d\Phi}{dS}$$

avec  $d\Phi = \int_{1/2\text{espace}} d^2\Phi$

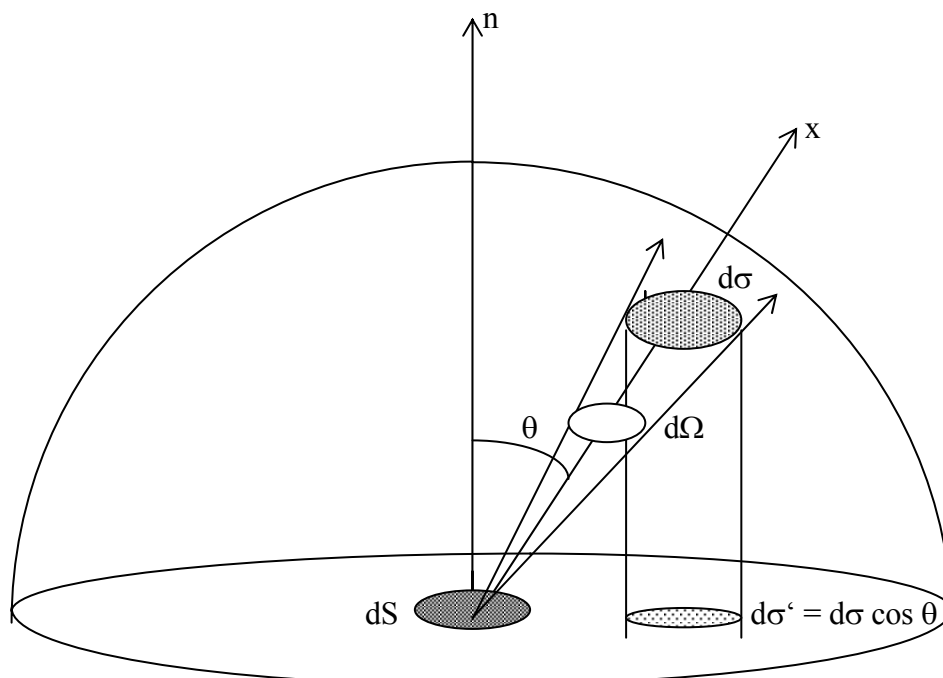
où  $d\Phi$  flux émis dans tout le demi-espace  
 $d^2\Phi$  flux émis dans l'angle solide  $d\Omega$ .

$$\text{Or } d^2\Phi = L \cdot dS \cdot \cos\theta \cdot d\Omega$$

d'où :  $d\Phi = \int_{1/2\text{espace}} L \cdot dS \cdot \cos\theta \cdot d\Omega$

$$d\Phi = L \cdot dS \int_{1/2\text{espace}} d\Omega \cos\theta$$

puisque  $L$  est constante



Considérons une demi sphère de rayon unité centrée en  $O$ . L'angle solide  $d\Omega$  découpe sur cette sphère une surface  $d\sigma$ . Soit  $d\sigma'$  la projection de  $d\sigma$  sur le plan de base.

$$\text{On a :} \quad \int_{1/2\text{espace}} d\sigma \cdot \cos \theta = \int_{\text{cercle de base}} d\sigma' = \pi$$

$$\text{d'où :} \quad d\Phi = \pi \cdot L \cdot dS \quad \text{or} \quad M = \frac{d\Phi}{dS}$$

$$\text{donc} \quad M = \pi \cdot L$$

Ce procédé d'intégration porte le nom de méthode d'**Ondracek**, ou méthode de la sphère unité.

*Remarque :*

La relation  $M = \pi \cdot L$  a été établie pour le rayonnement total. Le même raisonnement aurait pu être conduit pour un rayonnement monochromatique en définissant une luminance monochromatique  $L_\lambda$  constante dans toutes les directions si la surface considérée suit **la loi de Lambert**

$$\text{Dans ces conditions :} \quad \Phi_\lambda = \int_{1/2\text{espace}} L_\lambda \cdot dS \cdot \cos \alpha \cdot d\Omega$$

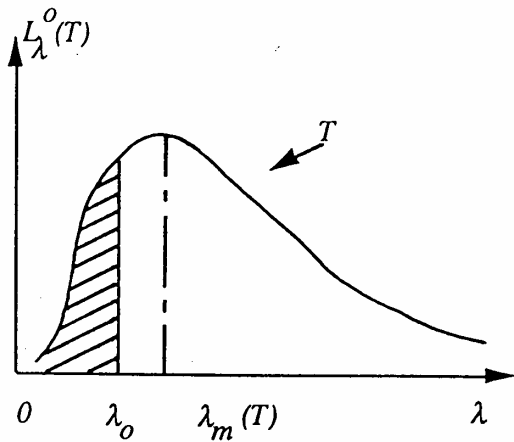
$$\Phi_\lambda = L_\lambda \cdot dS \cdot \pi$$

$$\text{et donc} \quad \mathbf{M}_\lambda = \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_\lambda$$

## 6. ANNEXE RAY2

**Fraction d'émittance totale**

Fonction  $z(0, \lambda_0/\lambda_m(T))$  pour le rayonnement d'équilibre



$$x = \frac{\lambda_0}{\lambda_m(T)}$$

$$z\left(0, \frac{\lambda_0}{\lambda_m(T)}\right) = \frac{\int_0^{\lambda_0} \pi L_\lambda^0(T) d\lambda}{\sigma T^4}$$

On rappelle que

- 1)  $T \cdot \lambda_m(T) = 2898 \mu m K$
- 2) 98 % de la puissance est répartie entre  $\frac{\lambda_m}{2}$  et  $7 \lambda_m$

x	Z	x	Z	x	Z	x	y
0,10	$5,5 \cdot 10^{-18}$						
0,20	$4,0 \cdot 10^{-8}$						
0,22	$3,1 \cdot 10^{-7}$	0,92	$19,78 \cdot 10^{-2}$	1,62	$59,29 \cdot 10^{-2}$	3,6	$92,24 \cdot 10^{-2}$
0,24	$1,6 \cdot 10^{-6}$	0,94	$21,08 \cdot 10^{-2}$	1,64	$60,10 \cdot 10^{-2}$	3,7	$92,74 \cdot 10^{-2}$
0,26	$6,4 \cdot 10^{-6}$	0,96	$22,39 \cdot 10^{-2}$	1,66	$60,90 \cdot 10^{-2}$	3,8	$93,20 \cdot 10^{-2}$
0,28	$2,03 \cdot 10^{-5}$	0,98	$23,69 \cdot 10^{-2}$	1,68	$61,68 \cdot 10^{-2}$	3,9	$93,62 \cdot 10^{-2}$
0,30	$5,47 \cdot 10^{-5}$	1,00	$25,00 \cdot 10^{-2}$	1,70	$62,43 \cdot 10^{-2}$	4,0	$94,01 \cdot 10^{-2}$
0,32	$1,28 \cdot 10^{-4}$	1,02	$26,32 \cdot 10^{-2}$	1,72	$63,17 \cdot 10^{-2}$	5,0	$96,61 \cdot 10^{-2}$
0,34	$2,69 \cdot 10^{-4}$	1,04	$27,63 \cdot 10^{-2}$	1,74	$63,90 \cdot 10^{-2}$	6,0	$97,89 \cdot 10^{-2}$
0,36	$5,17 \cdot 10^{-4}$	1,06	$28,94 \cdot 10^{-2}$	1,76	$64,61 \cdot 10^{-2}$	7,0	$98,61 \cdot 10^{-2}$
0,38	$9,21 \cdot 10^{-4}$	1,08	$30,25 \cdot 10^{-2}$	1,78	$65,30 \cdot 10^{-2}$	8,0	$99,03 \cdot 10^{-2}$
0,40	$1,54 \cdot 10^{-3}$	1,10	$31,55 \cdot 10^{-2}$	1,80	$65,98 \cdot 10^{-2}$	9,0	$99,30 \cdot 10^{-2}$
						10,0	$99,48 \cdot 10^{-2}$
0,42	$2,43 \cdot 10^{-3}$	1,12	$32,83 \cdot 10^{-2}$	1,82	$66,65 \cdot 10^{-2}$	15,0	$99,84 \cdot 10^{-2}$
0,44	$3,66 \cdot 10^{-3}$	1,14	$34,09 \cdot 10^{-2}$	1,84	$67,29 \cdot 10^{-2}$	20,0	$99,927 \cdot 10^{-2}$
0,46	$5,30 \cdot 10^{-3}$	1,16	$35,34 \cdot 10^{-2}$	1,86	$67,92 \cdot 10^{-2}$	30,0	$99,978 \cdot 10^{-2}$
0,48	$7,41 \cdot 10^{-3}$	1,18	$36,58 \cdot 10^{-2}$	1,88	$68,54 \cdot 10^{-2}$	40,0	$99,991 \cdot 10^{-2}$
0,50	$10,05 \cdot 10^{-3}$	1,20	$37,81 \cdot 10^{-2}$	1,90	$69,15 \cdot 10^{-2}$	50,0	$99,995 \cdot 10^{-2}$
						$\infty$	$100,0 \cdot 10^{-2}$
0,52	$1,33 \cdot 10^{-2}$	1,22	$39,02 \cdot 10^{-2}$	1,92	$69,75 \cdot 10^{-2}$		
0,54	$1,71 \cdot 10^{-2}$	1,24	$40,22 \cdot 10^{-2}$	1,94	$70,33 \cdot 10^{-2}$		
0,56	$2,16 \cdot 10^{-2}$	1,26	$41,40 \cdot 10^{-2}$	1,96	$70,89 \cdot 10^{-2}$		
0,58	$2,67 \cdot 10^{-2}$	1,28	$42,56 \cdot 10^{-2}$	1,98	$71,43 \cdot 10^{-2}$		
0,60	$3,25 \cdot 10^{-2}$	1,30	$43,71 \cdot 10^{-2}$	2,00	$71,96 \cdot 10^{-2}$		
0,62	$3,90 \cdot 10^{-2}$	1,32	$44,83 \cdot 10^{-2}$	2,1	$74,48 \cdot 10^{-2}$		
0,64	$4,61 \cdot 10^{-2}$	1,34	$45,93 \cdot 10^{-2}$	2,2	$76,72 \cdot 10^{-2}$		
0,66	$5,39 \cdot 10^{-2}$	1,36	$47,01 \cdot 10^{-2}$	2,3	$78,73 \cdot 10^{-2}$		
0,68	$6,22 \cdot 10^{-2}$	1,38	$48,07 \cdot 10^{-2}$	2,4	$80,53 \cdot 10^{-2}$		
0,70	$7,12 \cdot 10^{-2}$	1,40	$49,11 \cdot 10^{-2}$	2,5	$82,14 \cdot 10^{-2}$		
0,72	$8,07 \cdot 10^{-2}$	1,42	$50,13 \cdot 10^{-2}$	2,6	$83,58 \cdot 10^{-2}$		
0,74	$9,08 \cdot 10^{-2}$	1,44	$51,14 \cdot 10^{-2}$	2,7	$84,88 \cdot 10^{-2}$		
0,76	$10,14 \cdot 10^{-2}$	1,46	$52,12 \cdot 10^{-2}$	2,8	$86,05 \cdot 10^{-2}$		
0,78	$11,23 \cdot 10^{-2}$	1,48	$53,08 \cdot 10^{-2}$	2,9	$87,11 \cdot 10^{-2}$		
0,80	$12,37 \cdot 10^{-2}$	1,50	$54,03 \cdot 10^{-2}$	3,0	$88,07 \cdot 10^{-2}$		
0,82	$13,55 \cdot 10^{-2}$	1,52	$54,95 \cdot 10^{-2}$	3,1	$88,93 \cdot 10^{-2}$		
0,84	$14,75 \cdot 10^{-2}$	1,54	$55,86 \cdot 10^{-2}$	3,2	$89,72 \cdot 10^{-2}$		
0,86	$15,98 \cdot 10^{-2}$	1,56	$56,75 \cdot 10^{-2}$	3,3	$90,44 \cdot 10^{-2}$		
0,88	$17,23 \cdot 10^{-2}$	1,58	$57,61 \cdot 10^{-2}$	3,4	$91,10 \cdot 10^{-2}$		
0,90	$18,50 \cdot 10^{-2}$	1,60	$58,46 \cdot 10^{-2}$	3,5	$91,70 \cdot 10^{-2}$		

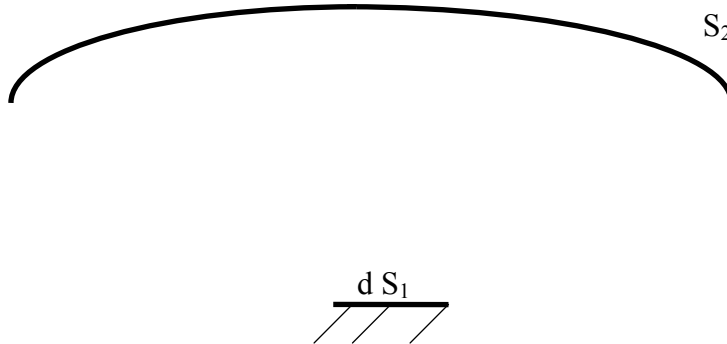
## 7. ANNEXE RAY3

# Méthode d'ONDRAČEK

Un cas particulier intéressant est celui dans lequel on peut considérer que l'une des surfaces est infiniment petite par rapport à l'autre

$$F_{12} = \frac{1}{\pi \cdot dS_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot dS_2 \cdot \cos\theta_2}{d^*d}$$

$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \frac{\cos\theta_1 \cdot dS_2 \cdot \cos\theta_2}{d^*d}$$



Exemple de calcul :

Nous calculons le facteur de forme d'un élément de surface  $dS_1$  par rapport à un disque  $S_2$ . Les deux surfaces  $dS_1$  et  $S_2$  sont parallèles et coaxiales. Avec cette géométrie particulière, la formule précédente s'écrit :

$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \cos\theta \frac{dS_2 \cdot \cos\theta_1}{d^2}$$

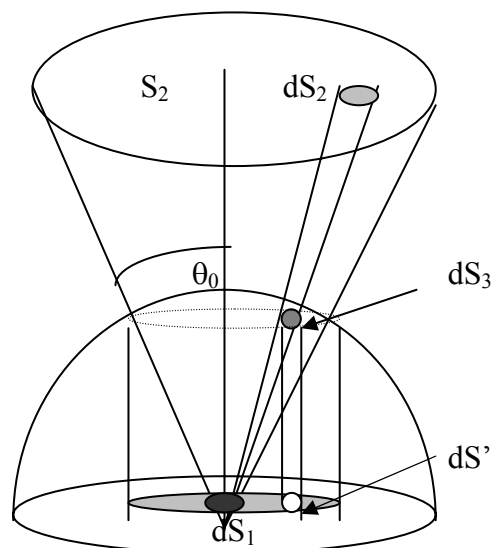


figure 3-8

Considérons un élément de surface quelconque  $dS_2$  sur la surface  $S_2$ . Il est vu depuis  $dS_1$  sous un angle solide  $d\Omega$ . Cet angle solide intercepte sur une demi-sphère de rayon  $R$  quelconque centrée sur  $dS_1$  une surface  $dS_3$

On a : 
$$d\Omega = \frac{dS_3}{R^2}$$

d'où : 
$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \cos\theta \, d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \cos\theta \frac{ds}{R^2}$$

Si l'on projette  $dS_3$  sur le plan de base, on obtient une surface  $ds'$ . L'intégration sur le disque  $S_2$  correspond à l'intégration de  $ds'$  sur le cercle de base projection de la calotte sphérique interceptée par le cône de demi-angle au sommet  $\theta_0$ . Donc :

$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \int_{(\text{cercle de base})} \frac{ds'}{R^2} = \frac{1}{\pi R^2} \pi \cdot r'^2$$

avec :  $r' = R \sin \theta_0$  d'où  $F_{12} = \sin^2 \theta_0$ .

Cette méthode peut s'appliquer à d'autres dispositions géométriques mais demande des configurations assez simples pour pouvoir être menée à bien ... aisément.

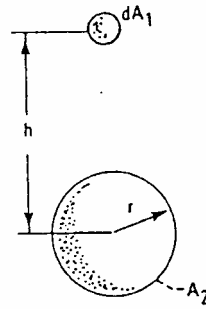
## 8. ANNEXE RAY4

**Facteurs de forme : FORMULES**

**Source sphérique ponctuelle par rapport à une sphère de rayon  $r$**

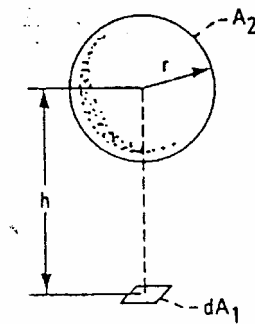
$$R = \frac{r}{h}$$

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - R^2} \right)$$



**Plan élémentaire  $dA_1$  par rapport à une sphère de rayon  $r$ . La normale de l'élément  $dA_1$  passe par le centre de la sphère.**

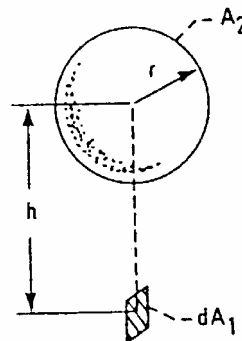
$$F_{12} = \left( \frac{r}{h} \right)^2$$



**Plan élémentaire  $dA_1$  par rapport à une sphère de rayon  $r$ . La tangente à l'élément  $dA_1$  passe par le centre de la sphère**

$$H = \frac{h}{r}$$

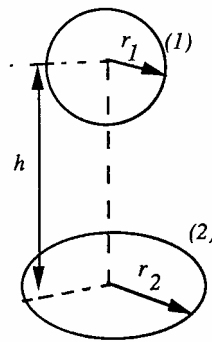
$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \left( \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{H^2 - 1}} - \frac{\sqrt{H^2 - 1}}{H^2} \right)$$



**Sphère de rayon  $r_1$  et disque de rayon  $r_2$  de même axe.**

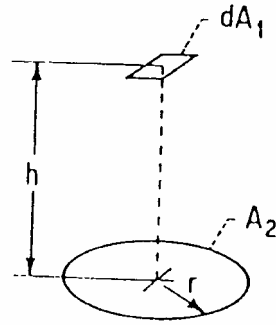
$$R_2 = \frac{r_2}{h}$$

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R_2^2}} \right]$$



**Plan élémentaire  $dA_1$  par rapport à un disque situé dans un plan parallèle à  $dA_1$  ; la normale à cet élément passe par le centre du disque.**

$$F_{12} = \frac{r^2}{h^2 + r^2}$$



**Prismes de longueur infinie, de section droite triangulaire. Les côtés AB, BC et AC peuvent être rectilignes ou curvilignes mais convexes (vers l'intérieur de l'enceinte)**

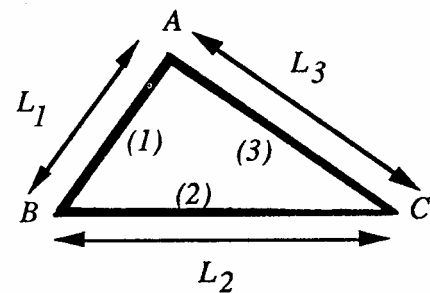
Il vient :

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$

Compte tenu des relations d'enceinte et de réciprocité, on trouve :

$$F_{12} = \frac{L_1 + L_2 - L_3}{2L_1}$$

$F_{13}$  et  $F_{23}$  se déduisent de  $F_{12}$  par changement des indices.



**Deux rectangles identiques X.Y et X'.Y' parallèles et exactement superposés à la distance Z.**

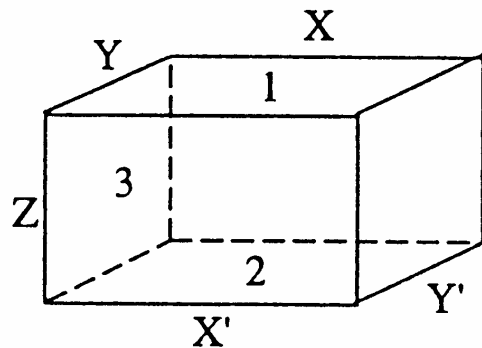
Introduisons la fonction de Gouffé G (k)

$$G(k) = \frac{1}{k} \text{Arctg } k + \frac{k^2 - 1}{4k^2} \ln(1 + k^2) - \frac{1}{2} \ln k$$

posons :  $\frac{X}{Z} = p$  et  $\frac{Y}{Z} = q$

On a

$$F_{12} = \frac{2q}{\pi p} \left[ G\left(\frac{q}{\sqrt{p^2 + 1}}\right) - G(q) \right] + \frac{2p}{\pi p} \left[ G\left(\frac{p}{\sqrt{q^2 + 1}}\right) - G(p) \right]$$



Pour les 2 rectangles perpendiculaires X.Y et Y.Z se raccordant par leur arête Y

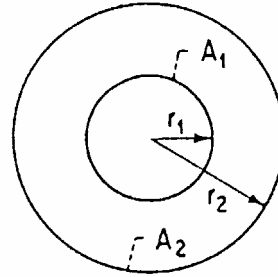
$$F_{13} = \frac{q}{\pi p} \left[ G(q) + G\left(\frac{q}{p}\right) - G\left(\frac{q}{\sqrt{p^2 + 1}}\right) \right]$$

**Cylindres concentriques de longueur infinie**

$$F_{12} = 1$$

$$F_{21} = \frac{r_1}{r_2}$$

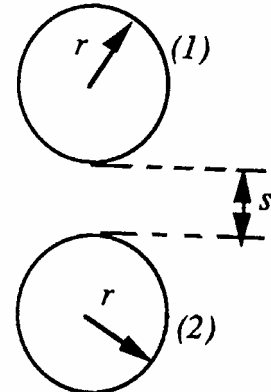
$$F_{22} = 1 - \frac{r_1}{r_2}$$



**Cylindres infiniment longs d'axes parallèles et de même diamètre.**

$$X = 1 + \frac{s}{2r}$$

$$F_{12} = F_{21} = \frac{1}{\pi} \left[ \sqrt{X^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{X} - X \right]$$

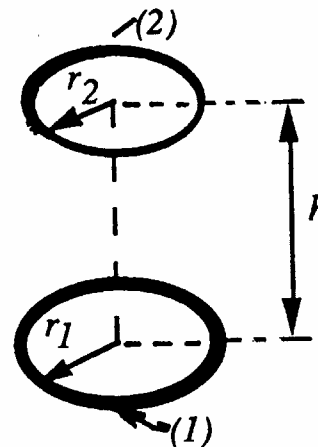


**Disques circulaires parallèles de même axe**

$$R_1 = \frac{r_1}{h} \quad R_2 = \frac{r_2}{h}$$

$$X = 1 + \frac{1 + R_2^2}{R_1^2}$$

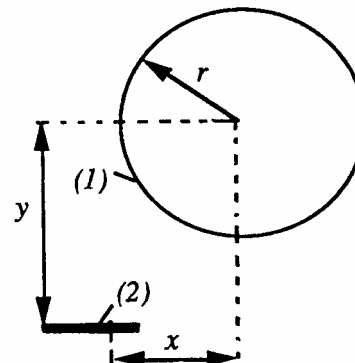
$$F_{12} = \frac{1}{2} \left[ X - \sqrt{X^2 - 4 \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2} \right]$$



**Bande élémentaire, de longueur quelconque, parallèle à l'axe d'un cylindre infiniment long.**

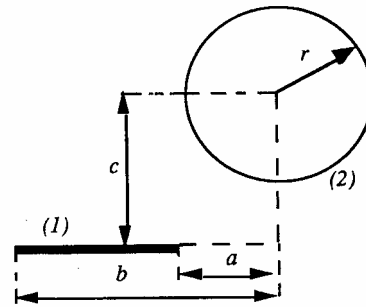
$$X = \frac{x}{r} \quad Y = \frac{y}{r}$$

$$F_{21} = \frac{Y}{X^2 + Y^2}$$



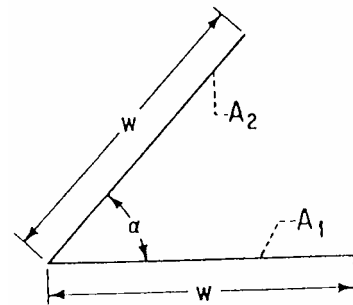
**Bande de largeur finie, de longueur infinie, parallèle à l'axe d'un cylindre infiniment long.**

$$F_{12} = \frac{r}{b-a} \left[ \operatorname{arctg} \frac{b}{c} - \operatorname{arctg} \frac{a}{c} \right]$$



**Deux portions de plan de longueur infinie, de largeur w, formant un dièdre d'angle plan  $\alpha$ .**

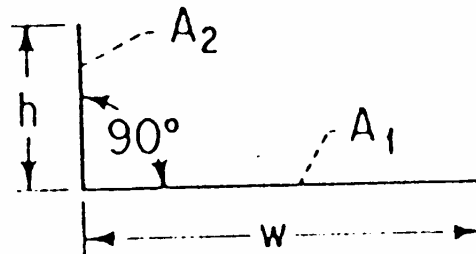
$$F_{12} = F_{21} = 1 - \sin \frac{\alpha}{2}$$



**Deux portions de plan de longueur infinie, de largeurs respectives h et w, formant un dièdre d'angle plan égal à 90°**

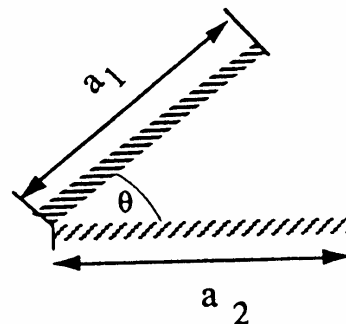
$$H = \frac{h}{w}$$

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left( 1 + H - \sqrt{1 + H^2} \right)$$



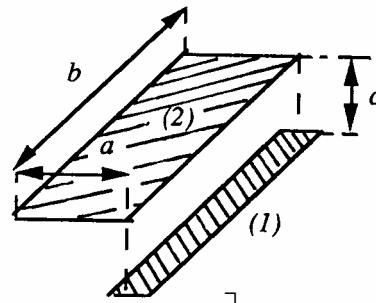
**Disposition bidimensionnelle : deux plaques ayant une arête commune et faisant un angle  $\theta$**

$$F_{12} = \frac{1}{2a_1} \left[ a_1 + a_2 - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \theta} \right]$$



**Bande élémentaire parallèle à un rectangle**

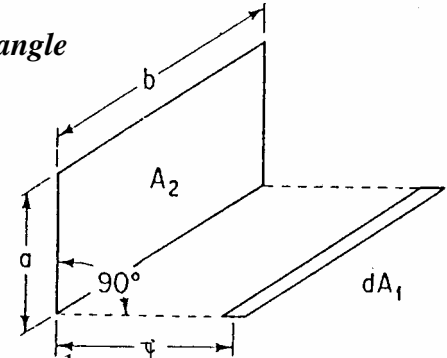
$$X = \frac{a}{c} \quad Y = \frac{b}{c}$$



$$F_{12} = \frac{1}{\pi Y} \left[ \sqrt{1+Y^2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} - \operatorname{arctg} X + \frac{Xl}{\sqrt{1+X^2}} \operatorname{arctg} \frac{l}{\sqrt{1+X^2}} \right]$$

**Bande élémentaire dans un plan perpendiculaire à un rectangle**

$$X = \frac{a}{c} \quad Y = \frac{c}{b}$$

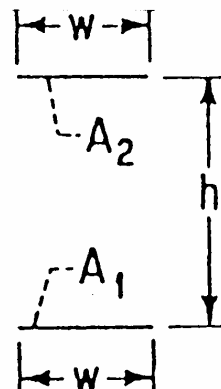


$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \left[ \tan^{-1} \frac{1}{Y} + \frac{Y}{2} \ln \frac{Y^2(X^2 + Y^2 + 1)}{(Y^2 + 1)(X^2 + Y^2)} - \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \tan^{-1} \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right]$$

**Bandes de longueur infinie, parallèles, de même largeur w et opposées.**

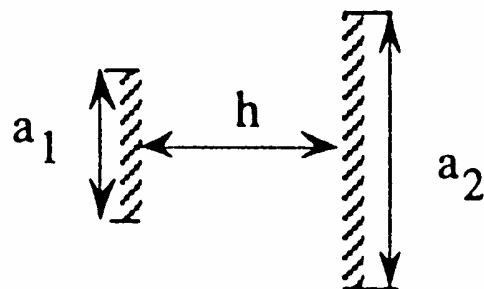
$$H = \frac{h}{W}$$

$$F_{12} = F_{21} = \sqrt{1+H^2} - H$$



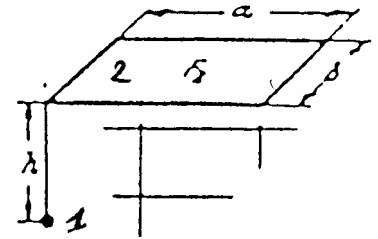
**Disposition bidimensionnelle – deux plaques parallèles de largeurs différentes et ayant le même plan de symétrie :**

$$F_{12} = \frac{1}{a_1} \left[ \sqrt{\frac{1}{4}(a_1 + a_2)^2 + h^2} - \sqrt{\frac{1}{4}(a_1 - a_2)^2 + h^2} \right]$$



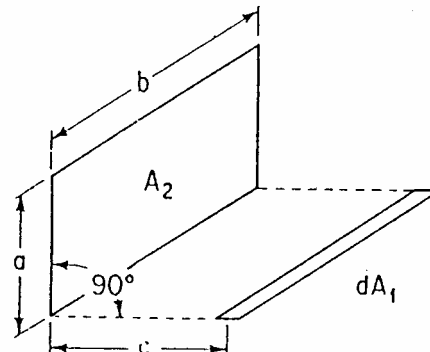
**Sphère élémentaire par rapport à une surface rectangulaire.**  
 La sphère est située sur la normale à la surface issue d'un angle.

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} \arctan g \cdot \frac{a}{\sqrt{b^2 + h^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \arctan g \frac{b}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right]$$



**Deux rectangles finis, ayant un bord commun et faisant entre-eux un angle de 90°.**

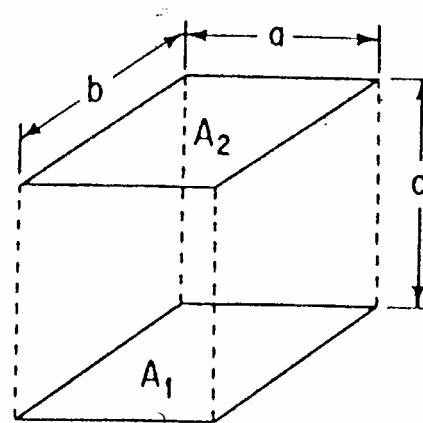
$$H = \frac{h}{l} \quad W = \frac{w}{l}$$



$$F_{12} = \frac{1}{\pi W} \left( W \tan^{-1} \frac{1}{W} + H \tan^{-1} \frac{1}{H} - \sqrt{H^2 + W^2} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{H^2 + W^2}} \right) + \frac{1}{4} \ln \left\{ \frac{(1 + W^2)(1 + H^2)}{1 + W^2 + H^2} \left[ \frac{W^2(1 + W^2 + H^2)}{(1 + W^2)(W^2 + H^2)} \right]^{W^2} \left[ \frac{H^2(1 + H^2 + W^2)}{(1 + H^2)(H^2 + W^2)} \right]^{H^2} \right\}$$

**Rectangles identiques, parallèles et directement opposés.**

$$X = \frac{a}{c} \quad Y = \frac{b}{c}$$



$$F_{12} = \frac{2}{\pi XY} \left\{ \ln \left[ \frac{(1 + X^2)(1 + Y^2)}{1 + X^2 + Y^2} \right]^{\frac{1}{2}} + X \sqrt{1 + Y^2} \tan^{-1} \frac{X}{\sqrt{1 + Y^2}} + Y \sqrt{1 + X^2} \cdot \tan^{-1} \frac{Y}{\sqrt{1 + X^2}} - X \tan^{-1} X - Y \tan^{-1} Y \right\}$$

## 9. ANNEXE RAY5

**Facteurs de forme : ABAQUES**

